0002085094197999

三重大学

2015年 工学部 第3問

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=e^{\sqrt{x}-1}-\sqrt{x}\ (x \geqq 0)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) \geqq 0$ を示せ．また等号が成立するような x の値を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $t=\sqrt{x}\ (\geqq 0)$ とおいて $f(x)$ を t で表したものを $g(t)$ とおくと

$g(t)=e^{t-1}-t\quad (t \geqq 0)$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗

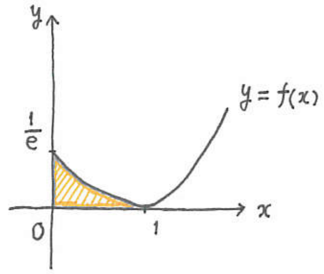
$\therefore\ g'(t)=e^{t-1}-1$

e^{t-1} は単調増加であり，$g'(t)=0$ となるのは $t=1$

右の増減表より $t \geqq 0$ のとき $g(t) \geqq 0$　等号成立は $t=1$

すなわち，$x \geqq 0$ のとき $f(x) \geqq 0$ が成立する．等号成立は $x=1$ ▨

(2) (1)の増減表より，



$y=f(x)$ のグラフは右のようになる

よって求める面積を S とすると，

$$S=\int_0^1 e^{\sqrt{x}-1}-\sqrt{x}\ dx$$

$t=\sqrt{x}$ とおいて置換積分すると，$dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$，

x	$0\to 1$
t	$0\to 1$

$$S=\int_0^1 (e^{t-1}-t)\cdot 2t\,dt$$

$$=\int_0^1 \left(e^{t-1}-\frac{1}{2}t^2\right)'\cdot 2t\,dt$$

$$=\left[\left(e^{t-1}-\frac{1}{2}t^2\right)\cdot 2t\right]_0^1-\int_0^1 2\left(e^{t-1}-\frac{1}{2}t^2\right)dt$$

$$=1-2\left[e^{t-1}-\frac{1}{6}t^3\right]_0^1$$

$$=1-2\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{e}\right)$$

$$=\frac{2(3-e)}{3e}$$ //