0002311098867999

茨城大学

2016年 教育学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ nを正の整数とする．座標平面上において，連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2 \\ y \leqq x + n(n+1) \end{cases}$$

の表す領域をDとする．次の各問に答えよ．

(1) 領域D内の，x座標とy座標がともに整数である点のうち，x座標が正であるものの個数Mをnを用いて表せ．

(2) 領域D内の，x座標とy座標がともに整数である点のうち，x座標が負であるものの個数をNとする．(1)で求めたMに対して$M-N \geqq 1000$となるような最小のnを求めよ．

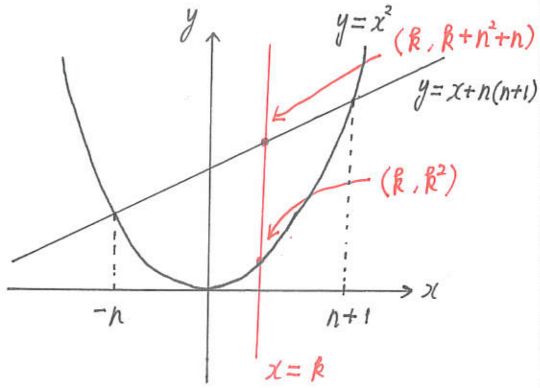
(1) $y=x^2$ と $y=x+n(n+1)$ の交点を求める

$x^2-x-n(n+1)=0$

$(x+n)\{x-(n+1)\}=0$

$\therefore x=-n,\ n+1$

$\therefore$ 交点は $(-n,\ n^2),\ (n+1,\ n^2+2n+1)$



求める点のうち $x=k$（kは整数で $-n \leqq k < n+1$）上にあるものは

$k+n^2+n-k^2+1$ 個であるから

$$M=\sum_{k=1}^{n+1}(k+n^2+n-k^2+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)+(n^2+n)(n+1)-\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)+n+1$$

$$=\frac{1}{3}(n+1)(2n^2+n+3)$$

(2) (1)と同様にして

$$N=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(-k+n^2+n-k^2+1)}_{k\text{を}-k\text{におきかえた}}=-\frac{1}{2}n(n+1)+(n^2+n)n-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n$$

$$=\frac{1}{3}n(2n^2+1)$$

$M-N \geqq 1000 \iff \frac{1}{3}(n+1)(2n^2+n+3)-\frac{1}{3}n(2n^2+1) \geqq 1000$

$\iff n^2+n+1 \geqq 1000$

n^2+n+1 は $n \geqq 1$ で単調増加で，$31^2+31+1=993<1000$

$32^2+32+1=1057>1000$

よって，$\underline{n=32}$ //