



2012年 理学部 第3問

3 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n e^{-t} dt$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定義する。ただし、 e は自然対数の底とする。次の各問に答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) $0 \leq t \leq 1$ のとき $t^n \leq t$ であることを用いて $a_n \leq \frac{a_1}{n!}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。

(3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(4) $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{e(n+1)!}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。

(5) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$ を求めよ。