0001641908538999

北海道大学

2014年 文系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 1,\quad a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) 以下が成立するように，実数 s，t $(s > t)$ を定めよ．

$$\begin{cases} a_{n+2} - sa_{n+1} = t(a_{n+1} - sa_n) \\ a_{n+2} - ta_{n+1} = s(a_{n+1} - ta_n) \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(2) 一般項 a_n を求めよ．

(1) $a_{n+2} = (s+t)a_{n+1} - st\,a_n$ と

$a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n$ の係数を比較して，

$$\begin{cases} s+t = 1 \\ st = -3 \end{cases}$$

この s, t は方程式

$x^2 - x - 3 = 0$ の解であるから

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 3}}{2}$$

$s > t$ より，$\underline{s = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2},\ t = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}}$ //

(2) (1) より数列 $\{a_{n+1} - sa_n\}$ は初項 $a_2 - sa_1 = 1 - s$，公比 t の数列

なので，$a_{n+1} - sa_n = (1-s)t^{n-1}$ ——①

同様に，$a_{n+1} - ta_n = (1-t)s^{n-1}$ ——②

$s + t = 1$ より

$1 - s = t,\ 1 - t = s$

①−② より，$(t-s)a_n = \underline{(1-s)}t^{n-1} - \underline{(1-t)}s^{n-1}$

$\therefore\ -\sqrt{13}\,a_n = t^n - s^n$

$$\underline{a_n = \frac{1}{\sqrt{13}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right\}}$$ //