

2014年 第19問

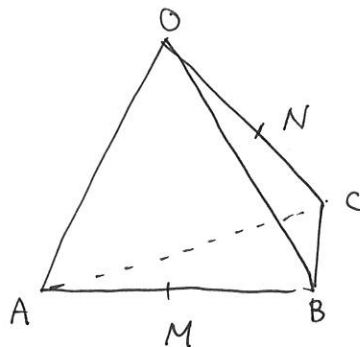
19 1辺の長さが1である正四面体OABCについて考える。辺ABおよび辺OCの中点をそれぞれM, Nとする。 $8\vec{MN} \cdot \vec{BN}$ の値を求めよ。

$$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c} \text{ とおく。}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \vec{ON} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\therefore \vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{BN} = \vec{ON} - \vec{OB} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$



$$\therefore 8\vec{MN} \cdot \vec{BN} = (-4\vec{a} - 4\vec{b} + 4\vec{c}) \cdot (-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c})$$

$$= 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 4|\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 4\vec{b} \cdot \vec{c} + 2|\vec{c}|^2$$

ここで、OABCは正四面体なので、 $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}, \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}, \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 8\vec{MN} \cdot \vec{BN} = 2 - 1 + 4 - 1 - 2 + 2$$

$$= \underline{\underline{4}}$$