0000061254783999

室蘭工業大学

2012年 工学部 第4問

数理 石井K

4 平面上の3点A，B，Cは同一直線上にないものとし，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=1$とする．また，$t$を正の実数とし，平面上の点Pを$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$と定め，線分APとBCの交点をQとする．

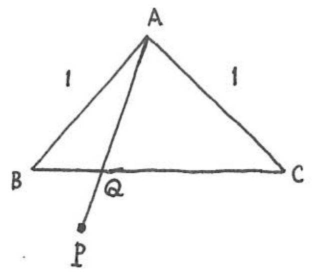
(1) $\overrightarrow{AQ}$をtおよび$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$を用いて表せ．

(2) 三角形ABPの面積をtと内積$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CP}$かつ点Qが線分BCを1：2に内分するとき，三角形BPQの面積を求めよ．

(1) 点QはBC上の点より，sを実数として，

$\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AB}+(1-s)\overrightarrow{AC}$ …① と表せる．



一方，3点A，Q，Pは同一直線上にあるので，kを実数として，

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$

$=k\overrightarrow{AB}+kt\overrightarrow{AC}$ …② と表せる．

$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$は1次独立より，①，②の係数を比較して，

$s=k$ かつ $1-s=kt$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{1+t}$，$s=\dfrac{1}{1+t}$　　$\therefore\ \overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{1+t}\overrightarrow{AB}+\dfrac{t}{1+t}\overrightarrow{AC}$ //

(2) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{1-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

また，$\triangle ABQ=\dfrac{t}{1+t}\cdot\triangle ABC$　($\because$ BQ：QC $=t:1$)，

$\triangle ABP=(1+t)\cdot\triangle ABQ$　($\because\ \overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{1+t}\overrightarrow{AP}$ より $\overrightarrow{AP}=(1+t)\overrightarrow{AQ}$)

$\therefore\ \triangle ABP=\dfrac{1}{2}t\sqrt{1-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$ //

(3) BQ：QC $=t:1=1:2$ より $t=\dfrac{1}{2}$

このとき，$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CP}$ より $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CP}=0$

$\therefore\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}$　　$\therefore$ (2)より，$\triangle ABP=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

AQ：AP $=\dfrac{2}{3}:1$　　$\therefore\ \triangle BPQ=\dfrac{\sqrt{3}}{8}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{24}$ //