

2018年工学部第4問

4 座標空間内の3点

$O(0, 0, 0)$ ,  $A(3, 0, 4)$ ,  $B(1, -2, 2)$

を通る平面を  $\alpha$  とする.  $\alpha$  上にない2点  $C, D$  は次を満たす.

- (i) 点  $C, D$  は平面  $\alpha$  に関して同じ側にある.
- (ii) 点  $C$  から  $\alpha$  に垂線  $CE$  を下ろすと, 半直線  $OE$  は角  $AOB$  の二等分線であり, 辺  $AB$  と点  $G$  で交わる. 点  $G$  は  $OE$  を  $3:1$  に内分する.
- (iii) 点  $D$  から  $\alpha$  に垂線  $DF$  を下ろすと, 半直線  $AF$  は辺  $OB$  と点  $H$  で交わる. 点  $H$  は辺  $OB$  を  $1:2$  に内分する.
- (iv)  $CE = 2DF$

定数  $k$  を  $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AH}$  となるようにとる.  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とおくと, 次の問いに答えよ.

- (1)  $\overrightarrow{OG}$  を  $\vec{a}, \vec{b}$  を用いて表し, 点  $G$  の座標を求めよ.
- (2) 平面  $\alpha$  に垂直なベクトルで, 長さが  $\sqrt{26}$  となるものを1つ求めよ.
- (3) 点  $C$  から平面  $\alpha$  上の点を通り点  $D$  へ行く最短経路がある. このときに通る平面  $\alpha$  上の点を  $P$  とする.  $\overrightarrow{OP}$  を  $\vec{a}, \vec{b}$  および  $k$  を用いて表せ.
- (4) (3)において, 点  $P$  が  $\triangle OAB$  の内部にあるための  $k$  の値の範囲を求めよ.