信州大学

2013年 第6問　1枚目／2枚　数理 石井K

$\boxed{6}$ a を定数とする．放物線 $y = a - x^2$ の接線のうち，原点との距離が最小になるものの方程式を求めよ．またそのときの距離を求めよ．

$y' = -2x$ より接点を $(t, a-t^2)$ とおくと，接線は，

$y = -2t(x-t) + a - t^2$

すなわち接線は，$2tx + y - a - t^2 = 0$ $\cdots$ (*)

これと原点とのキョリを $L(t)$ とおくと，点と直線のキョリ公式より，

$$L(t) = \frac{|-a-t^2|}{\sqrt{(2t)^2+1^2}} = \frac{|t^2+a|}{\sqrt{4t^2+1}}$$

$x = t^2\ (\geqq 0)$ とおいて，$\{L(t)\}^2$ を x で表したものを $f(x)$ とすると，

$$f(x) = \frac{(x+a)^2}{4x+1}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{2(x+a)(4x+1) - (x+a)^2 \cdot 4}{(4x+1)^2} = \frac{4(x+a)(x-a+\frac{1}{2})}{(4x+1)^2}$$

(i) $a \geqq \frac{1}{2}$ のとき，$x \geqq 0$ において

$f'(x) = 0$ となるのは，$x = a - \frac{1}{2}$

x	0	$\cdots$	$a-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	a^2	$\searrow$	$a-\frac{1}{4}$	$\nearrow$

$\therefore f(x)$ が最小となるのは，右の増減表より，$a - \frac{1}{4}$ $\left(x = a - \frac{1}{2} \text{ のとき}\right)$ → $t = \pm\sqrt{a-\frac{1}{2}}$

$\therefore$ (*) より接線の方程式は，$y = \pm\sqrt{4a-2}\,x + 2a - \frac{1}{2}$

そのときのキョリは，$\sqrt{a-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4a-1}$

(ii) $0 \leqq a < \frac{1}{2}$ のとき，

$x \geqq 0$ において $f'(x) \geqq 0$　$\therefore f(x)$ は単調増加で，$f(x) \geqq f(0) = a^2$

$\therefore$ (*) より接線は，$y = a$　そのときキョリは，a

(iii) $a < 0$ のとき，$f'(x) = 0$ となるのは，$x \geqq 0$ において，$x = -a$

x	0	$\cdots$	$-a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	a^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

$\therefore f(x)$ が最小となるのは，右の増減表より，

$x = -a$ のとき，最小値 0

(*) より，接線は，$y = \pm 2\sqrt{-a}\,x$ で，

そのときのキョリは，0

2枚目に解答をまとめました．

2013 年 第 6 問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{6}$ a を定数とする．放物線 $y = a - x^2$ の接線のうち，原点との距離が最小になるものの方程式を求めよ．またそのときの距離を求めよ．

(i) ～ (iii) をまとめると，

$$\begin{cases} \text{方程式は，} y = \pm\sqrt{4a-2}\,x + 2a - \frac{1}{2}\text{，キョリは，} \frac{1}{2}\sqrt{4a-1} & \left(a \geqq \frac{1}{2}\text{のとき}\right) \\ y = a \qquad a & \left(0 \leqq a < \frac{1}{2}\text{のとき}\right) \\ y = \pm 2\sqrt{-a}\,x \qquad 0 & (a < 0\text{のとき}) \end{cases}$$

— //