

2014年 第2問

数理
石井K

2 実数 a, b は、 $-1 < x < 1$ に対して $-3 < x^2 - 2ax + b < 5$ を満たすものとする。ただし、 $a > 0$ とする。このとき、次の間に答えよ。

- (1) 点 (a, b) が表す領域を図示せよ。
- (2) 座標平面上で、直線 $x = 0$ 、直線 $x = 1$ 、直線 $y = -3$ 、曲線 $y = x^2 - 2ax + b$ で囲まれる図形の面積 S を a, b を用いて表せ。
- (3) (2) の S の取りうる値の範囲を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - 2ax + b$ とおくと、 $f(x) = (x-a)^2 - a^2 + b$

(i) $0 < a \leq 1$ のとき。

$f(-1) = 1 + 2a + b < 5 \quad \therefore b < -2a + 4 \quad \dots \textcircled{1}$

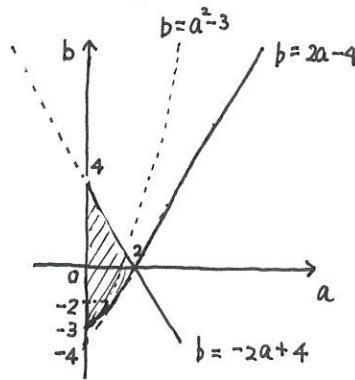
$f(a) = -a^2 + b > -3 \quad b > a^2 - 3 \quad \dots \textcircled{2}$

(ii) $a > 1$ のとき。

$f(-1) < 5$ より、 $b < -2a + 4 \quad \dots \textcircled{3}$

$f(1) = 1 - 2a + b > -3 \quad \therefore b > 2a - 4 \quad \dots \textcircled{4}$

\therefore 右図の斜線部分
(ただし、境界線は含まない)

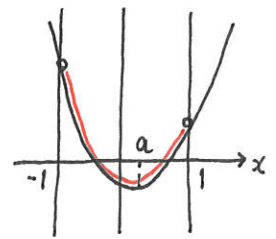


(2) (1) より、 $-1 < x < 1$ で、
 $-3 < x^2 - 2ax + b$ なので、

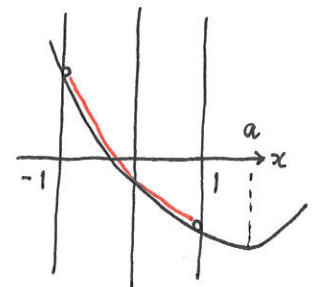
$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 x^2 - 2ax + b + 3 \, dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - ax^2 + (b+3)x \right]_0^1 \\
 &= -a + b + \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$

(3) $S = k$ とおくと、 $b = a + k - \frac{10}{3}$
 $k - \frac{10}{3} < 4$

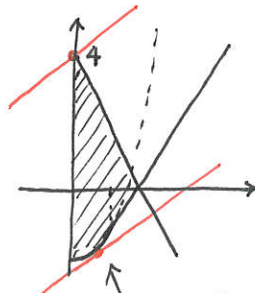
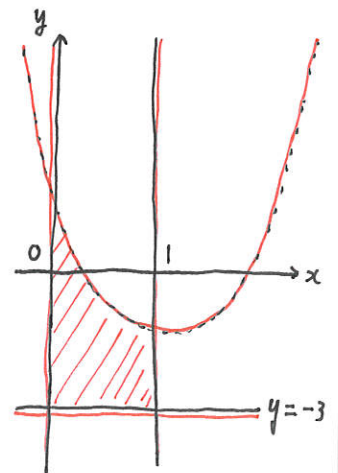
$\therefore \frac{1}{12} < S < \frac{22}{3}$



(i) $0 < a \leq 1$ のとき。



(ii) $a > 1$ のとき。



接するのは、

$a^2 - a + \frac{1}{3} - k = 0$ が重解をもつとき。

$\Delta = 1 - 4(\frac{1}{3} - k) = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{12}$