0001785454128999

信州大学

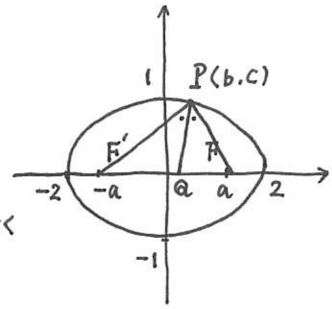
2014年 第3問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{3}$ 楕円 C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の焦点を F$(a,\ 0)$，F$'(-a,\ 0)$ とおく．ただし，$a>0$ とする．また，C 上の点 P$(b,\ c)$ に対して，$\angle$FPF$'$ の二等分線と x 軸との交点を Q とする．ただし，$bc \neq 0$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) F$'$P : FP ＝ F$'$Q : FQ であることを示せ．

(2) $\dfrac{\text{FQ}}{\text{FP}}$ の値を求めよ．

(3) 直線 PQ の傾きは $\dfrac{4c}{b}$ であることを示せ．



(1) F$'$P の延長線と F を通り PQ に平行な直線の交点を R とおく

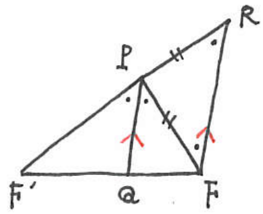
錯角より，$\angle PFR = \angle QPF$

同位角より，$\angle F'PQ = \angle PRF$

$\therefore \triangle F'PQ \backsim \triangle F'RF$

また，$\triangle PFR$ は $PR = PF$ の二等辺三角形であることより

$F'P : PR = F'P : PF = F'Q : FQ$ ▨



(2) $a=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$　$\therefore FP=\sqrt{(\sqrt{3}-b)^2+c^2}$，$F'P=\sqrt{(-\sqrt{3}-b)^2+c^2}$

$$\therefore (1)\text{より．}\ \frac{FQ}{FP}=\frac{FP\cdot 2a}{F'P+FP}\cdot\frac{1}{FP}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3}+b)^2+c^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-b)^2+c^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{(\sqrt{3}+b)^2+c^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-b)^2+c^2}\right)}{(\sqrt{3}+b)^2+c^2-(\sqrt{3}-b)^2-c^2}$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}+b)^2+c^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-b)^2+c^2}}{2b}$$

ここで，(b,c) は C 上の点より．$\dfrac{b^2}{4}+c^2=1$　$\therefore c^2=1-\dfrac{b^2}{4}$

$$\therefore \frac{FQ}{FP}=\frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b+2\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b-2\right)^2}}{2b}$$

$\left(\begin{array}{l}-2\leqq b\leqq 2 \text{ において}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}b+2>0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}b-2<0\end{array}\right)$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}b+2+\frac{\sqrt{3}}{2}b-2}{2b}$$

$$=\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}\ /\!/$$

2014年 第3問　　2枚目／2枚

$\boxed{3}$ 楕円 C : $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の焦点を F$(a,\ 0)$，F′$(-a,\ 0)$ とおく．ただし，$a>0$ とする．また，C 上の点 P$(b,\ c)$ に対して，∠FPF′ の二等分線と x 軸との交点を Q とする．ただし，$bc \neq 0$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\mathrm{F'P : FP = F'Q : FQ}$ であることを示せ．

(2) $\dfrac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{FP}}$ の値を求めよ．

(3) 直線 PQ の傾きは $\dfrac{4c}{b}$ であることを示せ．

(3) (2) より $\mathrm{FQ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{FP}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3}-b)^2+c^2}$$

(2) と同じく $c^2 = 1-\dfrac{b^2}{4}$ を代入

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b-2\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$$

$$= \sqrt{3}-\frac{3}{4}b$$

$\therefore$ Q$\left(\dfrac{3}{4}b,\ 0\right)$ となる．

$\therefore$ PQ の傾きは．$\dfrac{c-0}{b-\frac{3}{4}b} = \dfrac{4c}{b}$ ■