

2016年工学部第1問

1 4点O, A, B, Cが同一平面上にある. 3点O, A, Bは, $OA : OB = 3 : 2$, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ を満たすと
 する. 点Cが線分OAの垂直二等分線と線分OBの垂直二等分線の交点であるとき, \vec{OC} を \vec{OA} , \vec{OB} を用いて
 表せ.

線分OA, 線分OBの中点をそれぞれM, Nとおく

また, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とおき,

$|\vec{a}| = 3k$, $|\vec{b}| = 2k$ とおく

このとき, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} = 3k^2$

さらに, $\vec{OC} = s\vec{a} + t\vec{b}$ (s, t は実数) とおくと,

$$\vec{MC} = \vec{OC} - \vec{OM} = (s - \frac{1}{2})\vec{a} + t\vec{b}$$

$$\therefore MC \perp OA \text{ より, } \vec{MC} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{MC} \cdot \vec{a} &= \{(s - \frac{1}{2})\vec{a} + t\vec{b}\} \cdot \vec{a} \\ &= (s - \frac{1}{2})|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 9k^2(s - \frac{1}{2}) + 3k^2 \cdot t \\ &= 3k^2(3s + t - \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

$$\therefore k \neq 0 \text{ より, } 3s + t = \frac{3}{2} \cdots \textcircled{1}$$

同様にして, $\vec{NC} = s\vec{a} + (t - \frac{1}{2})\vec{b}$

$$\begin{aligned} \vec{NC} \cdot \vec{b} &= \{s\vec{a} + (t - \frac{1}{2})\vec{b}\} \cdot \vec{b} \\ &= s\vec{a} \cdot \vec{b} + (t - \frac{1}{2})|\vec{b}|^2 \\ &= 3k^2s + 4k^2(t - \frac{1}{2}) \\ &= k^2(3s + 4t - 2) \end{aligned}$$

$$\therefore 3s + 4t = 2 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } s = \frac{4}{9}, t = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \vec{OC} = \frac{4}{9}\vec{OA} + \frac{1}{6}\vec{OB}$$