

2010年生命環境（環境・情報）第4問

4  $A$  を成分が実数である2次の正方行列,  $E$  を2次の単位行列とする. 数列  $\{a_n\}$  を漸化式

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2^n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定める.  $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$  とおく. また, 座標平面上の点  $P_n(x_n, y_n)$  を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^{b_n} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) 数列  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ.
- (2)  $A$  は  $\sqrt{2}A^2 = (1 + \sqrt{3})A - \sqrt{2}E$  を満たすとする.  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  が存在することを示せ.
- (3) (2), かつ,  $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ,  $y_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$  のとき,  $x_3, y_3$  を求めよ. ただし,  $A^{-1}$  が存在することを証明なしに用いてよい.
- (4) (3) のとき,  $x_{n+1} = x_1, y_{n+1} = y_1$  となる最小の自然数  $n$  を求めよ.