



2010年教育学部(算数・技術)第11問

11 $f(x)$ は実数全体で定義された関数とする. 実数 a に関する条件(P)を考える.

(P) 正の実数 r を十分小さく選べば, $|x - a| < r$ をみたすすべての実数 x に対して $f(x) \leq f(a)$ が成り立つ.

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 実数 a が条件(P)をみたし, かつ, $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば, $f'(a) = 0$ であることを証明せよ.
- (2) 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} |x| - x & (x < 1 \text{ のとき}) \\ |x^2 - 6x + 8| & (x \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されているとき, 条件(P)をみたすような実数 a 全体の集合を決定せよ.

- (3) 一般に, 実数全体で定義された関数 $f(x)$ に対し, 次の命題は正しいか. 正しいければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ.

(命題) すべての実数 a が条件(P)をみたすならば, $f(x)$ は定数関数である.