電気通信大学

2012年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ に対して，xy 平面上の曲線 $C : y = f(x)$ を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) 曲線 C の第1象限にある変曲点Pの座標を求めよ．

(3) 変曲点Pにおける曲線 C の接線 ℓ の方程式を求めよ．

(4) $x = \tan\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．このとき，不定積分

$$I = \int \frac{dx}{x^2+1}$$

を θ を用いて表せ．なお，不定積分の計算においては積分定数を省略してもよい．

(5) 曲線 C と接線 ℓ および y 軸とで囲まれる部分の面積 S を求めよ．

(1) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ //

(2) $f''(x) = \dfrac{-2(x^2+1)^2+2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{3}+1} = \dfrac{3}{4}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{3}{4}$	↘	

増減表より．$P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$ //

(3) $f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{-2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{1}{3}+1\right)^2} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

$\therefore \ell : y = -\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{3}{4}$　　$\therefore \ell : y = -\dfrac{3\sqrt{3}}{8}x + \dfrac{9}{8}$ //

(4) 置換積分する．

$dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$\dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{1}{\tan^2\theta+1} = \cos^2\theta$

$\therefore I = \int d\theta = \theta$ //

(5) $S = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} -\frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{9}{8} - \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$= \left[-\dfrac{3\sqrt{3}}{16}x^2 + \dfrac{9}{8}x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1+x^2}dx$

$= \dfrac{5\sqrt{3}}{16} - \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$= \dfrac{5\sqrt{3}}{16} - \dfrac{\pi}{6}$ //