藤田保健衛生大学

2014年 医学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 現実の気体では圧力を $p>0$，体積を $v>0$，温度を $T>0$ とし，a，b，R を正の定数として方程式

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT \qquad \cdots\cdots①$$

に従う．

(1) ①から p を v を用いて表すと $p=\boxed{\ 9\ }$ となる． $\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2}$

(2) ボイル・シャルルの法則に従えば，$pv=RT$ ……②である．$a>bRT$ のとき，①と②を p と v の連立方程式とみなすと $v=\boxed{\ 10\ }$ である． $\frac{ab}{a-bRT}$

(3) $T=T_c$（正定数）のとき①の p を v の関数とみなして $\frac{dp}{dv}$，$\frac{d^2p}{dv^2}$ を求める．
①と $\frac{dp}{dv}=0$，$\frac{d^2p}{dv^2}=0$ を同時に満たす T_c，v_c，p_c を求めると，$T_c=\boxed{\ 11\ }$，$v_c=\boxed{\ 12\ }$，$p_c=\boxed{\ 13\ }$ である．

$\frac{8a}{27bR}$ $3b$ $\frac{a}{27b^2}$

(1) $R, T>0$ より①の右辺は正，よって $v\neq b$ ∴両辺を $v-b$ で割って

$$p+\frac{a}{v^2}=\frac{RT}{v-b} \qquad \therefore\ p=\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2}\ //$$

(2) (1)の結果を②に代入して，

$$\frac{vRT}{v-b}-\frac{a}{v}=RT \iff v^2RT-a(v-b)=v(v-b)RT$$

$$\iff v=\frac{ab}{a-bRT}\ // \qquad (\because\ a>bRT)$$

(3) (1)の結果の両辺を v で微分して，$\frac{dp}{dv}=\frac{-RT}{(v-b)^2}+\frac{2a}{v^3}=0 \cdots ③$

さらに v で微分して，$\frac{d^2p}{dv^2}=\frac{2RT}{(v-b)^3}-\frac{6a}{v^4}=0 \cdots ④$

③，④より，

$$\frac{4a}{v^3(v-b)}=\frac{6a}{v^4} \qquad \therefore\ v_c=3b,\ T_c=\frac{8a}{27bR},\ p_c=\frac{a}{27b^2}\ //$$