富山大学

2014年 第2問

数理 石井K

2 pを素数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 自然数kが$1 \leqq k \leqq p-1$を満たすとき，${}_pC_k$はpで割り切れることを示せ．ただし，${}_pC_k$はp個のものからk個取った組合せの総数である．

(2) nを自然数とするとき，nに関する数学的帰納法を用いて，n^p-nはpで割り切れることを示せ．

(3) nがpの倍数でないとき，$n^{p-1}-1$はpで割り切れることを示せ．

(1) ${}_pC_k = \dfrac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$

ここで，$1 \leqq k \leqq p-1$より．$k<p$，$p-k<p$であり．pは素数なので $k!$と$(p-k)!$は

ともにpの倍数ではない　∴ ${}_pC_k = p \cdot \dfrac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$ と表すと

${}_pC_k$は整数なので，$\dfrac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$も整数　よって ${}_pC_k$はpで割り切れる ■

(2) (i) $n=1$のとき．$1^p-1=0$より，pで割り切れる

(ii) $n=k$のとき．成り立つと仮定すると，k^p-kはpで割り切れる．

$$(k+1)^p-(k+1) = k^p+1+\left(\sum_{i=1}^{p-1} {}_pC_i \cdot k^i\right)-k-1$$

$$= k^p-k+\sum_{i=1}^{p-1} {}_pC_i \cdot k^i$$

∴ k^p-kはpで割り切れ，和の各項も(1)よりそれぞれpで割り切れるので，

$(k+1)^p-(k+1)$もpで割り切れる　∴ $n=k+1$のときも成り立つ

(i)，(ii)より　n:自然数のとき．n^p-nはpで割り切れる．■

(3) (2)より．$n(n^{p-1}-1)$はpで割り切れる．

pは素数なので，nがpで割り切れる または $n^{p-1}-1$がpで割り切れる

nはpの倍数でないので，$n^{p-1}-1$はpで割り切れる ■

(2)がとけなくても．結果だけ利用して(3)は解ける

(3)の方が易しい