0001671278238999

熊本大学

2014年 第1問　　1枚目／2枚

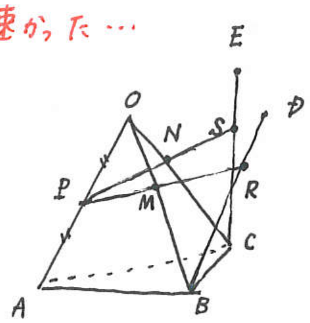
$\boxed{1}$ 空間内の1辺の長さ1の正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．また，点Dを $\overrightarrow{OD}=\vec{b}-\vec{a}$ を満たす点，点Eを $\overrightarrow{OE}=\vec{c}-\vec{a}$ を満たす点とし，点PをOAの中点とする．以下の問いに答えよ．

(1) $0<t<1$ に対し，BDを $t:(1-t)$ に内分する点をRとし，CEを $(1-t):t$ に内分する点をSとする．また，OBとPRの交点をMとし，OCとPSの交点をNとする．このとき，$\overrightarrow{OM}$ と $\overrightarrow{ON}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(注) (1)は相似を使うと速かった…

(2) △OMNの面積を t を用いて表せ．

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，△OMNの面積の最小値を求めよ．



(1) $\overrightarrow{OR}=(1-t)\vec{b}+t(\vec{b}-\vec{a})=-t\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{OS}=t\vec{c}+(1-t)(\vec{c}-\vec{a})=(t-1)\vec{a}+\vec{c}$

$\therefore\ \overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=-\left(t+\frac{1}{2}\right)\vec{a}+\vec{b}$ …①，$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OP}=\left(t-\frac{3}{2}\right)\vec{a}+\vec{c}$ …②

ここで $\overrightarrow{OM}=\alpha\vec{b}$，$\overrightarrow{ON}=\beta\vec{c}$ とおくと．

$\overrightarrow{PM}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\alpha\vec{b}$ …③，$\overrightarrow{PN}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\beta\vec{c}$ …④

P，M，Rは一直線上にあるので $\overrightarrow{PR}=k\overrightarrow{PM}$ と表せるので①，③より

$-\left(t+\frac{1}{2}\right)\vec{a}+\vec{b}=-\frac{1}{2}k\vec{a}+\alpha k\vec{b}$　$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ より．$\begin{cases}-t-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}k\\ 1=\alpha k\end{cases}$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{1}{2t+1}$

同様に，P，N，Sは同一直線上にあるので，$\overrightarrow{PS}=l\overrightarrow{PN}$ と表せるので②，④より

$\left(t-\frac{3}{2}\right)\vec{a}+\vec{c}=-\frac{1}{2}l\vec{a}+\beta l\vec{c}$　$\vec{a}\nparallel\vec{c}$ より．$\begin{cases}t-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}l\\ 1=\beta l\end{cases}$

$\therefore\ \beta=\dfrac{1}{3-2t}$　以上より．$\underline{\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2t+1}\vec{b},\ \overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{3-2t}\vec{c}}$ //

(2) (1)より．$|\overrightarrow{OM}|^2=\left(\dfrac{1}{2t+1}\right)^2|\vec{b}|^2=\left(\dfrac{1}{2t+1}\right)^2$　$\therefore|\overrightarrow{OM}|=\dfrac{1}{2t+1}$　同様に $|\overrightarrow{ON}|=\dfrac{1}{3-2t}$

$\therefore\ \triangle OMN=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2t+1}\cdot\dfrac{1}{3-2t}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{4(2t+1)(3-2t)}}$ //

0001671278238999

熊本大学

2014年 第1問　2枚目 / 2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 空間内の1辺の長さ1の正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．また，点Dを $\overrightarrow{OD}=\vec{b}-\vec{a}$ を満たす点，点Eを $\overrightarrow{OE}=\vec{c}-\vec{a}$ を満たす点とし，点PをOAの中点とする．以下の問いに答えよ．

(1) $0<t<1$ に対し，BDを $t:(1-t)$ に内分する点をRとし，CEを $(1-t):t$ に内分する点をSとする．また，OBとPRの交点をMとし，OCとPSの交点をNとする．このとき，$\overrightarrow{OM}$ と $\overrightarrow{ON}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) △OMNの面積を t を用いて表せ．

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，△OMNの面積の最小値を求めよ．

(3) (2) より．

$$\triangle OMN = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{-4t^2+4t+3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{-4(t-\frac{1}{2})^2+4}$$

$\therefore$ $0<t<1$ より　$t=\frac{1}{2}$ のとき 最小値 $\frac{\sqrt{3}}{16}$ をとる //