

2014年理(数学科)第3問

3 $\triangle ABC$ が与えられているとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 辺 AB 上の点 P , 辺 AC 上の点 Q が, それぞれ $AP:PB = s:1-s$, $AQ:QC = t:1-t$ と辺 AB , AC を内分するように与えられているとする (即ち $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ とする)。直線 PQ が $\triangle ABC$ の重心を通るための必要十分条件は $3st = s + t$ であることを示せ。
- (2) 直線 l を $\triangle ABC$ の重心を通る直線とする。 l によって, $\triangle ABC$ はふたつの図形 (三角形と四角形, またはふたつの三角形) に分割される。これらの図形の面積のうち, 大きい方を S_1 , 小さい方を S_2 とする。ただし, 面積が等しい場合も同じ記号を用い, $S_1 = S_2$ とする。
- (i) l が $\triangle ABC$ のいずれかの頂点を通ることは $S_1 = S_2$ となるための必要十分条件であることを示せ。
- (ii) $\frac{S_1}{S_2}$ の最大値と最小値を求めよ。