

2012年工学部第3問

数理  
石井K

3 曲線  $y^2 - 2xy + x^3 = 0$  について、以下の問いに答えよ。ただし、 $x$  および  $y$  は  $x \geq 0, y \geq 0$  の実数とする。

- (1)  $y$  についての解を求めよ。
- (2) 曲線の概形を描き、 $x$  および  $y$  のとりえる値の範囲を求めよ。
- (3) 直線  $y = x$  と曲線のうち  $y \geq x$  を満たす線分で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

(1) 解の公式より  $y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4x^3}}{2} = \underline{x \pm x\sqrt{1-x}} \quad (x \geq 0 \text{ より})$

(2) (1) より  $x$  の範囲は  $0 \leq x \leq 1$

また、 $y_+ = x + x\sqrt{1-x}$ ,  $y_- = x - x\sqrt{1-x}$  とおく

$$y'_+ = 1 + \sqrt{1-x} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x}} \quad \therefore y'_+ = \frac{2\sqrt{1-x} + 2 - 3x}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\therefore y'_+ = 0 \text{ とするとき } x = \frac{8}{9}$$

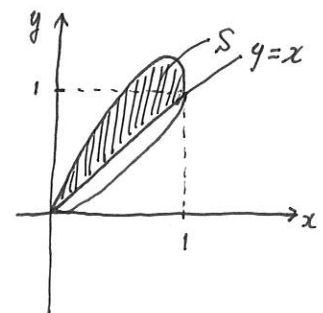
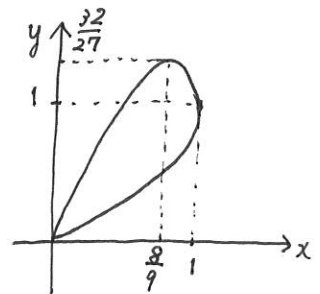
$$y'_- = 1 - \sqrt{1-x} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x}} = 1 - \sqrt{1-x} + \frac{x}{2\sqrt{1-x}} \geq 0$$

$\therefore y_-$  は単調増加

また、 $x=0$  のとき  $y_- = y_+ = 0$ ,  $x=1$  のとき  $y_- = y_+ = 1$

$\therefore$  右のグラフより、 $\underline{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{32}{27}}$

$x$	0	...	$\frac{8}{9}$	...	1
$y'_+$		+	0	-	
$y_+$		↗	$\frac{32}{27}$	↘	



(3)  $S = \int_0^1 y_+ - x \, dx$

$$= \int_0^1 x\sqrt{1-x} \, dx$$

$$= \int_1^0 (1-t^2)t \cdot (-2)t \, dt$$

$$= \int_0^1 2t^2 - 2t^4 \, dt$$

$$= \left[ \frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5 \right]_0^1$$

$\left( \begin{array}{l} t = \sqrt{1-x} \text{ において置換積分} \\ x = 1-t^2, -2t \, dt = dx \\ x \parallel 0 \rightarrow 1 \\ t \parallel 1 \rightarrow 0 \end{array} \right)$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{5}$$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{15}}}$$