京都工芸繊維大学

2014年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ x の2次方程式(*) $x^2-2ax+2ab-b^2=0$ について，以下の問いに答えよ．ただし，a, b は実数とする．

(1) (*)は実数解のみをもつことを証明せよ．

(2) 1個のさいころを2回投げて出た目の数を順に a, b とする．この a, b に対して(*)を考え，

「(*)は符号の異なる2つの解をもつ」という事象を A,

「(*)の2つの解の差の絶対値は6以下である」という事象を B

とする．ただし，(*)が重解をもつときは(*)の2つの解の差は0と考える．このとき，事象 A, B および和事象 $A\cup B$ の確率 $P(A)$, $P(B)$ および $P(A\cup B)$ をそれぞれ求めよ．

(1) (*)の判別式を D とおくと，$\frac{D}{4}=a^2-(2ab-b^2)$

$=(a-b)^2$

$\geqq 0$

∴ (*)は実数解のみをもつ ■

(2) (*)が符号の異なる2つの解をもつ $\iff$ $f(x)=x^2-2ax+2ab-b^2$ とおいたとき，

$f(0)<0$

∴ $2ab-b^2<0 \iff b(2a-b)<0$

$b>0$ より，$2a<b$ ∴ $(a,b)=(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)$

Bにはなく，Aだけに入っている

の6通り．∴ $P(A)=\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$

(*)の解の差は $\frac{2a+\sqrt{D}}{2}-\frac{2a-\sqrt{D}}{2}=\sqrt{D}$

∴ $\sqrt{D}\leqq 6 \iff D\leqq 36$ ∴ $\frac{D}{4}\leqq 9$

(1)より，$(a-b)^2\leqq 9 \iff |a-b|\leqq 3$

∴ $(a,b)=(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),$
$(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),$
$(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3)$
$(4,4),(4,5),(4,6),(5,2),(5,3),(5,4)$
$(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)$ の30通り．

∴ $P(B)=\frac{30}{6^2}=\frac{5}{6}$　　$P(A\cup B)=\frac{33}{6^2}=\frac{11}{12}$