

2017年 工学科学 第4問

4  $n$  を 2 以上の自然数とする.  $n$  個の実数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  が条件  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  を満たすとする.  $b_1, b_2, \dots, b_n$  は  $n$  個の数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  をすべて並べた順列であり, 順列  $a_1, a_2, \dots, a_n$  とは異なるとする.

(1) 実数  $p_1, p_2, q_1, q_2$  が  $p_1 < p_2$  および  $q_1 < q_2$  を満たすとき, 不等式

$$p_1q_2 + p_2q_1 < p_1q_1 + p_2q_2$$

が成り立つことを示せ.

(2)  $b_i > b_j$  を満たす 2 つの自然数  $i, j$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) が存在することを示せ.

(3)  $n$  個の数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  をすべて並べた順列  $c_1, c_2, \dots, c_n$  で, 不等式

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k < \sum_{k=1}^n a_k c_k$$

を満たすものが存在することを示せ.