0001729450728999

青山学院大学

2012年 理工B方式 第5問

数理 石井K

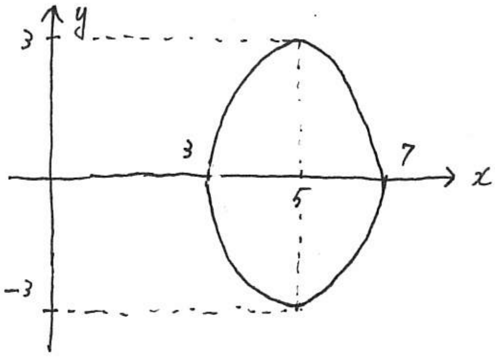
$\boxed{5}$ 曲線 $\dfrac{(x-5)^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ を C とする．

(1) 曲線 C の概形を描け．

(2) 曲線 C で囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(3) 曲線 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ．

(1) 右図のだ円となる



(2) $\dfrac{y^2}{9}=1-\dfrac{(x-5)^2}{4}$

$\therefore \dfrac{y}{3}=\pm\sqrt{1-\dfrac{(x-5)^2}{4}}$

$\therefore V_1=\pi\displaystyle\int_3^7 9\cdot\left(1-\dfrac{(x-5)^2}{4}\right)dx$

$t=x-5$ とおくと．

$=9\pi\displaystyle\int_{-2}^{2} 1-\dfrac{t^2}{4}\,dt$

$=\underline{24\pi}$ //

(3) バームクーヘン積分を用いて

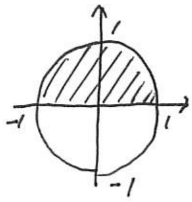
$V_2=\displaystyle\int_3^7 2\pi x\cdot(y_+-y_-)\,dx$

$=\displaystyle\int_3^7 2\pi x\cdot 6\sqrt{1-\dfrac{(x-5)^2}{4}}\,dx$

$=12\pi\displaystyle\int_3^7 x\sqrt{1-\dfrac{(x-5)^2}{4}}\,dx$ 　$t=\dfrac{x-5}{2}$ とおくと．

$=24\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}(2t+5)\sqrt{1-t^2}\,dt$

$=24\pi\left\{\underbrace{\displaystyle\int_{-1}^{1}2t\sqrt{1-t^2}\,dt}_{\text{奇関数}}+\displaystyle\int_{-1}^{1}\underbrace{5\sqrt{1-t^2}}_{\text{偶関数}}\,dt\right\}$



$\therefore V_2=120\pi\underbrace{\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt}_{\text{半円}}$

$=120\pi\cdot\dfrac{\pi}{2}$

$=\underline{60\pi^2}$ //