

2017年 工学科学 第4問

4 n を 2 以上の自然数とする. n 個の実数 a_1, a_2, \dots, a_n が条件 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ を満たすとする. b_1, b_2, \dots, b_n は n 個の数 a_1, a_2, \dots, a_n をすべて並べた順列であり, 順列 a_1, a_2, \dots, a_n とは異なるとする.

(1) 実数 p_1, p_2, q_1, q_2 が $p_1 < p_2$ および $q_1 < q_2$ を満たすとき, 不等式

$$p_1q_2 + p_2q_1 < p_1q_1 + p_2q_2$$

が成り立つことを示せ.

(2) $b_i > b_j$ を満たす 2 つの自然数 i, j ($1 \leq i < j \leq n$) が存在することを示せ.

(3) n 個の数 a_1, a_2, \dots, a_n をすべて並べた順列 c_1, c_2, \dots, c_n で, 不等式

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k < \sum_{k=1}^n a_k c_k$$

を満たすものが存在することを示せ.