



2014年第3問

3  $A$  は3桁の自然数で、その百の位の数  $x$ 、十の位の数  $y$ 、一の位の数  $z$  は、

$$100x + 10y + z = x! + y! + z!$$

を満たしている。

- (1)  $6!$  の値を求め、 $x, y, z$  はすべて5以下であることを示せ。
- (2)  $x$  は3以下であることを示せ。
- (3)  $y, z$  のうち少なくとも1つは5であることを示せ。
- (4)  $A$  を求めよ。

(1)  $6! = 720$   $x, y, z$  の少なくとも1つが6以上であると仮定して (左辺より)。

背理法で示す。(右辺) は720以上になるので、 $x \geq 7$  となる。

しかし、このとき再び(右辺) をみると、 $x \geq 7$  より。(右辺) は  $7! = 7 \times 6!$  より大きい。 $7 \times 6!$  は4桁の整数なので  $A$  (=左辺) も4桁となり、 $A$  が3桁の自然数であることに矛盾する  $\therefore x, y, z$  はすべて5以下  $\square$

(2)  $x \geq 4$  とすると。(左辺)  $\geq 400$

一方(1)より(右辺)  $\leq 5! + 5! + 5! = 360$  となり等号は成り立たない

$\therefore x \leq 3$   $\square$

(3) (1)より、 $y \leq 5, z \leq 5$  であるので、

$y, z$  がともに5ではないと仮定すると、 $y \leq 4, z \leq 4$

また(2)より、 $x \leq 3$   $\therefore$  (右辺)  $\leq 3! + 4! + 4! = 54$  となり。

$A$  は3桁ではないことになり矛盾  $\therefore y, z$  の少なくとも1つは5である  $\square$

(4) (1)~(3)より。(i)  $x=1, y=5$  のとき、 $150 + z = 121 + z!$  不適。

(ii)  $x=1, z=5$  のとき、 $105 + 10y = 121 + y!$   $\therefore y=4$

(iii)  $x=2, y=5$  のとき、 $250 + z = 122 + z!$   $\therefore 128 + z = z!$  不適。

(iv)  $x=2, z=5$  のとき、 $205 + 10y = 122 + y!$  不適。

(v)  $x=3, y=5$  のとき  $350 + z = 126 + z!$  不適 (vi)  $x=3, z=5$  のとき  $305 + 10y = 126 + y!$

以上より

$$A = 145$$

不適

