

2015年薬学部第3問

3 次の にあてはまる数または式を記入せよ。

漸化式 $a_{n+2} = da_{n+1} - a_n$ と条件 $a_1 = 0, a_2 = 1$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を, 2次方程式と三角関数を用いて求める. ここで, d は実数とする.

- (1) 実数 β をとり, $a_n = \beta^{n-1}$ とおくと, $\{a_n\}$ が漸化式を満たすのは, β が 2次方程式 = 0 の解となるときである.
- (2) (1) の 2次方程式が相異なる 2つの実数解を持つ条件は $d > \text{イ}$ または $d < \text{ウ}$ である. このとき, 相異なる 2つの実数解を β_1, β_2 と表し, $a_n = p\beta_1^{n-1} + q\beta_2^{n-1}$ (p, q : 任意の実数) とおけば, $\{a_n\}$ は漸化式を満たす. よって, a_1, a_2 の条件を満たすように p, q を定めれば, 数列の一般項は d と n を用いて $a_n = \text{エ}$ と表される.
- (3) (1) の 2次方程式が 2つの虚数解を持つ条件は $< d < \text{カ}$ である. 三角関数の加法定理より

$$\begin{cases} \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \text{キ} \cos \theta \\ \sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2 \text{ク} \cos \theta \end{cases}$$

が成り立つので, $a_n = p \cos(n-1)\theta + q \sin(n-1)\theta$ (p, q : 任意の実数) とおき, $d = \text{ケ}$ となるように θ を選べば, $\{a_n\}$ は漸化式を満たす. よって, a_1, a_2 の条件を満たすように p, q を定めれば, 数列の一般項は θ と n を用いて $a_n = \text{コ}$ のように表される.