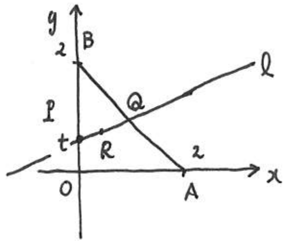
2014年 理系 第3問

$\boxed{3}$ Oを原点とする xy 平面上に2点 A(2, 0), B(0, 2) がある．直線 ℓ は辺 OB 上の点 P(0, t) ($0 \leqq t \leqq 2$) を通り，△OABの面積を2等分しているとする．直線 ℓ と △OABの辺の2つの交点のうち，点Pでない方の点をQとし，線分PQの中点をRとする．以下の問いに答えよ．



(1) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき，点Rの座標 (x, y) を t を用いて表せ．

(2) (1)のとき，x のとる値の範囲を求めよ．また，y を x の式で表せ．

(3) $1 \leqq t \leqq 2$ のとき，点Rの座標 (x, y) を t を用いて表せ．

(4) (3)のとき，x のとる値の範囲を求めよ．また，y を x の式で表せ．

(5) (2)で求めた x の式を $f(x)$，(4)で求めた x の式を $g(x)$ とする．2曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ と直線 $x = \dfrac{1}{2}$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) △OABの面積は $\frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 2 = 2$

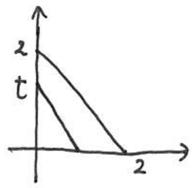
$\therefore$ Q$(s, 2-s)$ とおくと，$(0<s<2)$

$\therefore \triangle BPQ = \frac{1}{2}\cdot(2-t)\cdot s = 1 \quad \therefore s = \frac{2}{2-t} \quad \therefore \underline{R\left(\frac{1}{2-t}, \frac{2-t^2}{4-2t}\right)}$ //

(2) $0 \leqq t \leqq 1$ より．$\frac{1}{2} \leqq x = \frac{1}{2-t} \leqq 1 \quad \therefore \underline{\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1}$ //

$2-t = \frac{1}{x} \iff t = 2 - \frac{1}{x}$ より．$y = \dfrac{2-\left(2-\frac{1}{x}\right)^2}{4-2\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{2x^2-(2x-1)^2}{2x}$

$\therefore \underline{y = -x + 2 - \frac{1}{2x}}$ //



(3) 右図のようになるので，Q は x軸上にあるので Q$(s, 0)$ とおく．

$\therefore \triangle BPQ = \frac{1}{2} t \cdot s = 1 \quad \therefore s = \frac{2}{t} \quad \therefore \underline{R\left(\frac{1}{t}, \frac{t}{2}\right)}$ //

(4) $1 \leqq t \leqq 2$ より．$\underline{\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1}$ //　また，$\underline{y = \frac{1}{2x}}$ //

(5). $g(x) - f(x) = x - 2 + \frac{1}{x} \quad \therefore x - 2 + \frac{1}{x} = 0 \iff x^2 - 2x + 1 = 0$

$\therefore$ 交点は $\left(1, \frac{1}{2}\right)$　また $x>0$ より．相加・相乗平均の関係から $g(x) \geqq f(x)$

$$\therefore S = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x - 2 + \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 2x + \log|x|\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{8} + 1 - \log\frac{1}{2}$$

$$= \underline{\log 2 - \frac{5}{8}} \ //$$