2015年 理系 第3問

3 e を自然対数の底とする．次の問いに答えよ．

(1) 2つの関数 $f(x)=e^{-x}\sin x$ と $g(x)=e^{-x}\cos x$ を微分せよ．

(2) 定積分 $\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ の値を求めよ．

(3) k を 0 以上の整数とする．定積分 $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ の値を k を用いて表せ．

(4) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ の値を求めよ．

(1) $f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=\underline{e^{-x}(\cos x-\sin x)}$ //

$g'(x)=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\cdot(-\sin x)=\underline{-e^{-x}(\cos x+\sin x)}$ //

(2) (1)より，$e^{-x}\sin x=-\frac{1}{2}\{f'(x)+g'(x)\}$ より， ← (1)を使わず部分積分でも解ける (やってみよう！)

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx=\int_0^{\pi}-\frac{1}{2}\{f'(x)+g'(x)\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)\}\right]_0^{\pi}$$
$$=-\frac{1}{2}(-e^{-\pi})+\frac{1}{2}\cdot 1$$
$$=\underline{\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)}\ //$$

(3) $t=x-k\pi$ とおいて置換積分する．$dt=dx$，

x	$k\pi\to(k+1)\pi$
t	$0\to\pi$

$$\therefore\ (\text{与式})=\int_0^{\pi} e^{-t-k\pi}\sin(t+k\pi)\,dt$$
$$=e^{-k\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}(\sin t\underbrace{\cos k\pi}_{=(-1)^k}-\cos t\underbrace{\sin k\pi}_{=0})\,dt$$
$$=(-1)^k\cdot e^{-k\pi}\underline{\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt}$$ ← (2)を代入する！
$$=\underline{\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\cdot(-e^{-\pi})^k}\ //$$

(4) (3)で求めたものを $k=0$ から $k=n-1$ まで足し合わせることにより

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}\sin x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\cdot(-e^{-\pi})^k\right)$$
$$=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-e^{-\pi})^k}$$
$$=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\cdot\frac{1}{1-(-e^{-\pi})}$$
$$=\underline{\frac{1}{2}}\ //$$

公比 $-e^{-\pi}$，初項 1 の等比数列の和．$|-e^{-\pi}|<1$ より収束