2013年 第3問

$\boxed{3}$ $n$を2以上の整数とする．$n$個の実数$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$が与えられたとき，

$$P_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2,\quad Q_n={a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2$$

とおく．次に，$1 \leqq i < j \leqq n$を満たすすべての番号$i$，$j$に対する$a_ia_j$の和を$R_n$とする．たとえば，$R_2=a_1a_2$，$R_3=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3$である．同様に，$1 \leqq i < j \leqq n$を満たすすべての番号$i$，$j$に対する$(a_i-a_j)^2$の和を$S_n$とする．たとえば，$S_2=(a_1-a_2)^2$，$S_3=(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+(a_2-a_3)^2$である．次の問いに答えよ．

(1) $P_4$を$Q_4$と$R_4$を使って表せ．

(2) すべての$n \geqq 2$に対して$S_n=(n-1)Q_n-2R_n$と表されることを，数学的帰納法で証明せよ．

(3) $Q_4$を$P_4$と$S_4$を使って表せ．

(4) $a_1+a_2+a_3+a_4=1$のとき，$Q_4$の最小値と，そのときの$a_1$，$a_2$，$a_3$，$a_4$の値をそれぞれ求めよ．