

2015年 第3問

3 e を自然対数の底とし, t を $t > e$ となる実数とする. このとき, 曲線 $C: y = e^x$ と直線 $y = tx$ は相異なる2点で交わるので, 交点のうち x 座標が小さいものを P , 大きいものを Q とし, P, Q の x 座標をそれぞれ α, β ($\alpha < \beta$) とする. また, P における C の接線と Q における C の接線との交点を R とし, 曲線 C , x 軸および2つの直線 $x = \alpha, x = \beta$ で囲まれる部分の面積を S_1 , 曲線 C および2つの直線 PR, QR で囲まれる部分の面積を S_2 とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) $\frac{S_2}{S_1}$ を α と β を用いて表せ.
- (2) $\alpha < \frac{e}{t}$, $\beta < 2 \log t$ となることを示し, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ. 必要ならば, $x > 0$ のとき $e^x > x^2$ であることを証明なしに用いてよい.