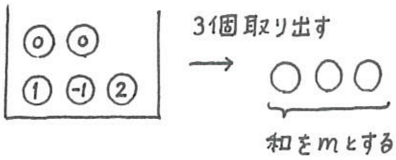
宇都宮大学

2015年 第1問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 袋の中に5個の玉が入っている．それらは，0と書かれた玉が2個，1と書かれた玉，-1と書かれた玉，2と書かれた玉がそれぞれ1個ずつである．この袋の中から3個の玉を取り出す．取り出した3個の玉に書かれた数字の和をmとする．次に，袋の中に残った2個の玉に書かれた数字の積をnとする．このように定義されたmとnのもとで，2次関数

$$f(x)=x^2-mx+n$$



を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) mのとり得る値をすべて求めよ．
(2) mとnのとり得る組合せ$(m,\ n)$をすべて求めよ．
(3) mとnのとり得る組合せ$(m,\ n)$のすべてについて，それぞれが起こる確率を求めよ．
(4) 不等式$f(x)>0$がすべての実数xについて成り立つ確率を求めよ．
(5) 方程式$f(x)=0$が異なる実数解α，βをもち，同時に$\alpha<2$かつ$\beta<2$となる確率を求めよ．

(1) 3個の取り出し方は，

$\{0,0,1\}$, $\{0,0,-1\}$, $\{0,0,2\}$, $\{0,1,-1\}$, $\{0,1,2\}$, $\{0,-1,2\}$, $\{1,-1,2\}$
$m=1$　$m=-1$　$m=2$　$m=0$　$m=3$　$m=1$　$m=2$

よって，mのとり得る値は，$\underline{m=-1,0,1,2,3}$ //

(2) $m=-1$のとき，2個の残し方は $\{1,2\}$　$\therefore n=2$
$m=0$のとき，　〃　$\{0,2\}$　$\therefore n=0$
$m=1$のとき，　〃　$\{-1,2\}$, $\{0,1\}$　$\therefore n=-2,0$
$m=2$のとき，　〃　$\{1,-1\}$, $\{0,0\}$　$\therefore n=-1,0$
$m=3$のとき，　〃　$\{0,-1\}$　$\therefore n=0$

以上より，$\underline{(m,n)=(-1,2),(0,0),(1,-2),(1,0),(2,-1),(2,0),(3,0)}$ //

(3) $(m,n)=(-1,2)$ … $\{0,0,-1\}\{1,2\}$ に分けるので $\dfrac{1}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{10}$
$(0,0)$ … $\{0,1,-1\}\{0,2\}$ に分けるので $\dfrac{2}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{5}$
$(1,-2)$ … $\{0,0,1\}\{-1,2\}$　$\dfrac{1}{10}$
$(1,0)$ … $\{0,-1,2\}\{0,1\}$　$\dfrac{1}{5}$
$(2,-1)$ … $\{0,0,2\}\{-1,1\}$　$\dfrac{1}{10}$
$(2,0)$ … $\{1,-1,2\}\{0,0\}$　$\dfrac{1}{10}$
$(3,0)$ … $\{0,1,2\}\{0,-1\}$　$\dfrac{1}{5}$

以上より，
$$\begin{cases}(m,n)=(-1,2),(1,-2),(2,-1),(2,0)\text{ のとき }\dfrac{1}{10}\\(m,n)=(0,0),(1,0),(3,0)\text{ のとき，}\dfrac{1}{5}\end{cases}$$ //

0002128361787999

2015年第1問　2枚目/2枚

数理 石井K

1 袋の中に5個の玉が入っている．それらは，0と書かれた玉が2個，1と書かれた玉，-1と書かれた玉，2と書かれた玉がそれぞれ1個ずつである．この袋の中から3個の玉を取り出す．取り出した3個の玉に書かれた数字の和をmとする．次に，袋の中に残った2個の玉に書かれた数字の積をnとする．このように定義されたmとnのもとで，2次関数

$$f(x) = x^2 - mx + n$$

を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) mのとり得る値をすべて求めよ．
(2) mとnのとり得る組合せ$(m,\ n)$をすべて求めよ．
(3) mとnのとり得る組合せ$(m,\ n)$のすべてについて，それぞれが起こる確率を求めよ．
(4) 不等式$f(x) > 0$がすべての実数xについて成り立つ確率を求めよ．
(5) 方程式$f(x) = 0$が異なる実数解$\alpha,\ \beta$をもち，同時に$\alpha < 2$かつ$\beta < 2$となる確率を求めよ．

(4) $f(x)=0$の判別式をDとすると．$D<0$であるから．

$D = m^2 - 4n < 0$

よって．(2)で求めたもののうち，$m^2 < 4n$となるものは．

$(m, n) = (-1, 2)$のみであるから (3)より，確率は．$\underline{\dfrac{1}{10}}$//

(5) $f(x)=0$が異なる実数解α, βをもち，$\alpha < 2$かつ$\beta < 2$となる

$\iff D > 0$ かつ $\alpha - 2 < 0$ かつ $\beta - 2 < 0$

$\iff m^2 > 4n$ かつ $(\alpha-2)+(\beta-2) < 0$ かつ $(\alpha-2)(\beta-2) > 0$

$\iff m^2 > 4n$ かつ $\alpha+\beta < 4$ かつ $\alpha\beta - 2(\alpha+\beta) > -4$

$\iff m^2 > 4n$ かつ $m < 4$ かつ $n - 2m > -4$　($\because$ 解と係数の関係より．$\alpha+\beta = m$，$\alpha\beta = n$)

これをみたすのは．$(m, n) = (1, 0)$のみ

$\therefore$ 確率は (3)より．$\underline{\dfrac{1}{5}}$//