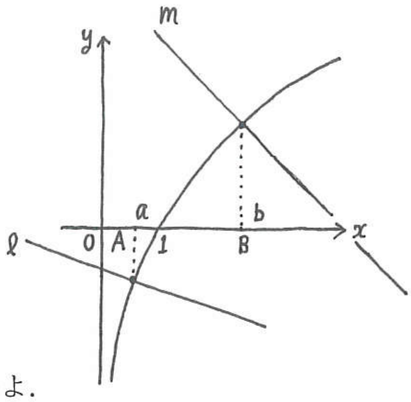
山形大学

2015年 工学部 第4問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ xy 平面上に曲線 $C : y = \log x$ がある．曲線 C 上の異なる2点 $\mathrm{A}(a,\ \log a)$，$\mathrm{B}(b,\ \log b)$ における法線をそれぞれ ℓ，m とし，ℓ と m の交点を P とする．線分 AP の長さを d とするとき，次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数である．



(1) ℓ の方程式を求めよ．

(2) P の座標を a，b を用いて表せ．

(3) $d = \sqrt{a^2+1}\left(b + \dfrac{\log a - \log b}{a-b}\right)$ を示せ．

(4) B が A に限りなく近づくときの d の極限値を $r = \displaystyle\lim_{b \to a} d$ とする．

(i) $r = \dfrac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{a}$ を示せ．

(ii) a が $a > 0$ の範囲を動くとき，r の最小値と，そのときの a の値を求めよ．

(1) $y' = \dfrac{1}{x}$ より，Aでの接線の傾きは $\dfrac{1}{a}$　よって法線 ℓ の傾きは $-a$

$\therefore \ell : y = -a(x-a) + \log a$　　$\therefore \underline{\ell : y = -ax + a^2 + \log a}$ 〃

(2) (1)と同様にして，$m : y = -bx + b^2 + \log b$

$\therefore -bx + b^2 + \log b - (-ax + a^2 + \log a) = 0$

$a \neq b$ より，$x = a + b + \dfrac{\log a - \log b}{a-b}$　このとき，$y = -ab + \dfrac{a\log b - b\log a}{a-b}$

$\therefore \underline{\mathrm{P}\left(a+b+\dfrac{\log a - \log b}{a-b},\ -ab + \dfrac{a\log b - b\log a}{a-b}\right)}$ 〃

(3) $d^2 = \left(a+b+\dfrac{\log a - \log b}{a-b} - a\right)^2 + \left(-ab + \dfrac{a\log b - b\log a}{a-b} - \log a\right)^2$

$= \left(b + \dfrac{\log a - \log b}{a-b}\right)^2 + \left(-ab + \dfrac{a(\log b - \log a)}{a-b}\right)^2$

$= \left(b + \dfrac{\log a - \log b}{a-b}\right)^2 + a^2\left(b + \dfrac{\log a - \log b}{a-b}\right)^2$

$= (a^2+1)\cdot\left(b + \dfrac{\log a - \log b}{a-b}\right)^2$

$\therefore d = \sqrt{a^2+1}\left|b + \dfrac{\log a - \log b}{a-b}\right|$　ここで，$\dfrac{\log a - \log b}{a-b}$ は直線ABの傾きなので，常に正となる．

$\therefore d = \sqrt{a^2+1}\left(b + \dfrac{\log a - \log b}{a-b}\right)$ ▨

2015年 工学部 第4問　2枚目／2枚

$\boxed{4}$ xy 平面上に曲線 $C : y = \log x$ がある．曲線 C 上の異なる2点 A$(a,\ \log a)$，B$(b,\ \log b)$ における法線をそれぞれ ℓ，m とし，ℓ と m の交点をPとする．線分APの長さを d とするとき，次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数である．

(1) ℓ の方程式を求めよ．

(2) Pの座標を a，b を用いて表せ．

(3) $d = \sqrt{a^2+1}\left(b + \dfrac{\log a - \log b}{a-b}\right)$ を示せ．

(4) BがAに限りなく近づくときの d の極限値を $r = \lim\limits_{b \to a} d$ とする．

(i) $r = \dfrac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{a}$ を示せ．

(ii) a が $a > 0$ の範囲を動くとき，r の最小値と，そのときの a の値を求めよ．

(4)(i) $f(x) = \log x$ とおくと，導関数の定義より，

$$\lim_{b \to a} \frac{\log a - \log b}{a-b} = f'(a) = \frac{1}{a}$$

$$\therefore r = \lim_{b \to a} \sqrt{a^2+1}\left(b + \frac{\log a - \log b}{a-b}\right)$$

$$= \sqrt{a^2+1}\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \cdot (a^2+1)$$

$$= \frac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{a} \quad ▨$$

(ii) $g(a) = \dfrac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{a}$ とおくと，

$$g'(a) = \frac{\frac{3}{2}(a^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2a^2 - (a^2+1)^{\frac{3}{2}} \cdot 1}{a^2} = \frac{\sqrt{a^2+1}\,(3a^2 - a^2 - 1)}{a^2} = \frac{\sqrt{a^2+1} \cdot 2\left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{a^2}$$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$
$g(a)$		↘		↗

$\therefore$ r の最小値は $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ r の最小値は $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\left(a = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{ のとき}\right)$ //