2014年 工学部 第4問

$\boxed{4}$ 関数 $f(x) = xe^{2-x}$ について，次の問に答えよ．

(1) 曲線 $C : y = f(x)$ の概形をかけ．

(2) 曲線 C の接線のうち傾きが最小のものを ℓ とするとき，ℓ の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C と直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $f'(x) = e^{2-x} + x\cdot(-e^{2-x})$

$= (1-x)e^{2-x}$

$f''(x) = -e^{2-x} + (1-x)\cdot(-e^{2-x})$

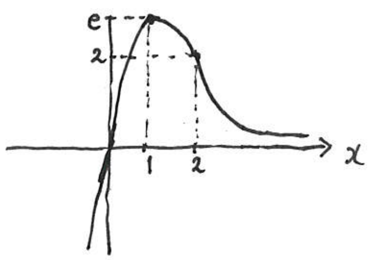
$= (x-2)e^{2-x}$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗	e	↘	2	↘

極大

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^2}{e^x} = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^{2-x} = -\infty$



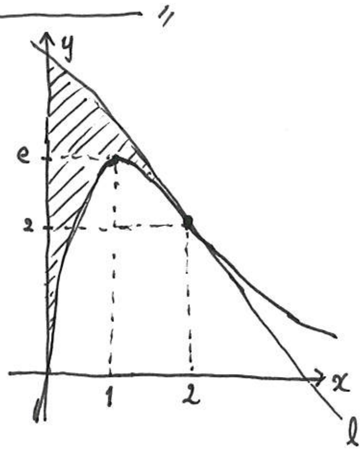
(2) (1)の増減表より，接線の傾きの最小値

は $f'(2) = -1$ $\therefore$ $\ell : y = -(x-2)+2$

$\therefore$ $\ell : y = -x+4$

(3) C：上に凸であるから．$0 \leqq x \leqq 2$ で

$xe^{2-x} \leqq -x+4$



$\therefore$ $S = \displaystyle\int_0^2 -x+4-xe^{2-x}\,dx$

$= \left[-\frac{x^2}{2}+4x\right]_0^2 - \displaystyle\int_0^2 x\left(-e^{2-x}\right)'dx$

$= -2+8-\left[-xe^{2-x}\right]_0^2 + \displaystyle\int_0^2 -e^{2-x}\,dx$

$= 6+2+\left[e^{2-x}\right]_0^2$

$= 8+1-e^2$

$= 9-e^2$