



2017年教育・薬学部第4問

4 放物線  $C: y = x^2$  と定点  $A(0, 1)$ ,  $B(0, 2)$  および  $C$  上の第1象限の点  $P_1(2, 4)$  が与えられている。自然数  $n = 1, 2, 3, \dots$  について、以下の操作をくり返す。

$C$  上の第1象限の点  $P_n(p_n, p_n^2)$  に対し、

**手順1** 直線  $P_nA$  と  $C$  との交点のうち、第2象限にあるものを  $Q_n(q_n, q_n^2)$  とし、

**手順2** 直線  $Q_nB$  と  $C$  との交点のうち、第1象限にあるものを  $P_{n+1}(p_{n+1}, p_{n+1}^2)$  とする。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $a$  を定数とする。直線  $y = ax + 1$  と  $C$  との交点のうち、第1象限にあるものを  $P(p, p^2)$ 、第2象限にあるものを  $Q(q, q^2)$  とする。このとき、 $pq = -1$  が成り立つことを示せ。また、点  $Q_1$  の座標を求めよ。
- (2) 点  $P_2$ ,  $Q_2$  および  $P_3$  の座標を求めよ。
- (3) 数列  $\{p_n\}$  および数列  $\{q_n\}$  の一般項をそれぞれ求めよ。
- (4)  $x \geq 0$  の範囲において、 $C$  と直線  $P_nQ_n$  および  $y$  軸で囲まれた図形の面積  $S_n$  を求めよ。さらに、極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n}$  を求めよ。