

2011年 第3問

3 0以上の整数 n に対して

$$a_n = \int_0^1 e^{-x} x^n dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とおく. ここで e は自然対数の底である. 次の各問に答えよ.

- (1) a_0 と a_1 を求めよ.
- (2) a_{n+1} と a_n の間に成り立つ関係式を求めよ.
- (3) 等式

$$\frac{a_n}{n!} = 1 - \frac{1}{e} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

が成り立つことを証明せよ.

- (4) 次式が成り立つことを証明せよ.

$$1 \ 0 \leq a_n \leq a_0 \quad 2 \ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e$$