0001630819638999

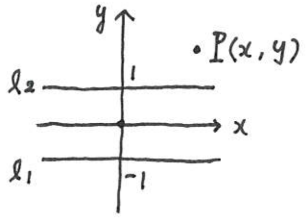
九州大学

2014年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 座標平面上の直線 $y=-1$ を ℓ_1，直線 $y=1$ を ℓ_2 とし，x 軸上の2点 O(0, 0)，A(a, 0) を考える．点 P(x, y) について，次の条件を考える．

$$d(\mathrm{P},\ \ell_1) \geqq \mathrm{PO} \quad \text{かつ} \quad d(\mathrm{P},\ \ell_2) \geqq \mathrm{PA} \quad \cdots\cdots ①$$



ただし，$d(\mathrm{P},\ \ell)$ は点Pと直線 ℓ の距離である．

(1) 条件①を満たす点Pが存在するような a の値の範囲を求めよ．

(2) 条件①を満たす点P全体がなす図形の面積 S を a を用いて表せ．ただし，a の値は(1)で求めた範囲にあるとする．

(1) $\mathrm{PO}=\sqrt{x^2+y^2}$，$\mathrm{PA}=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$

$\therefore$ ① $\Leftrightarrow |y-(-1)| \geqq \sqrt{x^2+y^2}$ かつ $|y-1| \geqq \sqrt{(x-a)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow y^2+2y+1 \geqq x^2+y^2$ かつ $y^2-2y+1 \geqq (x-a)^2+y^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2+ax-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} \leqq -\frac{1}{2}x^2+ax-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}$

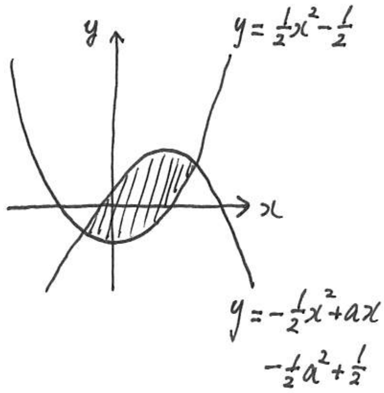
$\Leftrightarrow x^2-ax+\frac{1}{2}a^2-1 \leqq 0$

$\therefore$ 判別式 $D=a^2-4\left(\frac{1}{2}a^2-1\right) \geqq 0$ $\therefore \underline{-2 \leqq a \leqq 2}$ //

(2) $x^2-ax+\frac{1}{2}a^2-1=0$ の解は，$x=\dfrac{a\pm\sqrt{4-a^2}}{2}$

小さい方を α，大きい方を β とおく．

$\therefore S=\displaystyle\int_\alpha^\beta -\frac{1}{2}x^2+ax-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\,dx$



$=-\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{a+\sqrt{4-a^2}}{2}-\dfrac{a-\sqrt{4-a^2}}{2}\right)^3$

$=\underline{\dfrac{1}{6}\cdot(4-a^2)\sqrt{4-a^2}}$ //