九州大学

2016年 理系 第1問

1枚目/2枚

数理 石井K

1 座標平面上の曲線 C_1, C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = \log x \quad (x > 0)$$
$$C_2 : y = (x-1)(x-a)$$

とする．ただし，a は実数である．n を自然数とするとき，曲線 C_1, C_2 が2点P，Qで交わり，P，Qの x 座標はそれぞれ1, $n+1$ となっている．また，曲線 C_1 と直線PQで囲まれた領域の面積を S_n，曲線 C_2 と直線PQで囲まれた領域の面積を T_n とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a を n の式で表し，$a > 1$ を示せ．

(2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n \log T_n}$ を求めよ．

(1) $\log(n+1) = n(n+1-a)$ で $n \neq 0$ より．$\underline{a = n+1 - \dfrac{\log(n+1)}{n}}$ //

$f(x) = x - \log(x+1)$ $(x > 0)$ とおくと，

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0$$

∴ $f(x)$ は単調増加より，$f(x) > f(0) = 0$

∴ $x > 0$ において，$x > \log(x+1)$

これを使うと，

$$a - 1 = n - \frac{\log(n+1)}{n} > n - \frac{n}{n} = n - 1$$

∴ $n \geqq 2$ のとき $a - 1 > 0$ ∴ $a > 1$

$n = 1$ のときは．$a = 2 - \dfrac{\log 2}{1}$

ここで，$\log 2 < \log e = 1$ なので，$a > 1$

以上より，$a > 1$ ▨

九州大学

2016年 理系 第1問　　2枚目／2枚

1 座標平面上の曲線 C_1, C_2 をそれぞれ

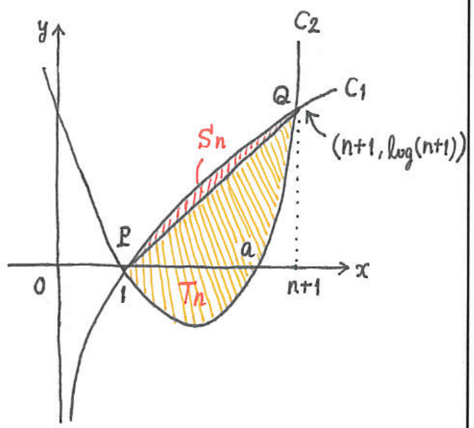
$$C_1 : y = \log x \quad (x > 0)$$
$$C_2 : y = (x-1)(x-a)$$

とする．ただし，a は実数である．n を自然数とするとき，曲線 C_1, C_2 が2点P，Qで交わり，P，Qの x 座標はそれぞれ 1, $n+1$ となっている．また，曲線 C_1 と直線PQで囲まれた領域の面積を S_n，曲線 C_2 と直線PQで囲まれた領域の面積を T_n とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a を n の式で表し，$a > 1$ を示せ．

(2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\log T_n}$ を求めよ．



(2) (1)より右図のようになる．

直線PQ：$y = \dfrac{\log(n+1)}{n}(x-1)$ より

$$S_n = \int_1^{n+1} \log x - \frac{\log(n+1)}{n}\cdot(x-1)\,dx$$

$$= \left[x\log x - x - \frac{\log(n+1)}{2n}\cdot(x-1)^2\right]_1^{n+1}$$

$$= (n+1)\log(n+1) - (n+1) - \frac{n\log(n+1)}{2} + 1$$

$$= \underline{\left(\frac{n}{2}+1\right)\log(n+1) - n}\,/\!/$$

$$T_n = \int_1^{n+1} \frac{\log(n+1)}{n}\cdot(x-1) - (x-1)(x-a)\,dx$$

$$= -\int_1^{n+1}(x-1)\{x-(n+1)\}\,dx$$

$\frac{1}{6}$公式

$$= \underline{\frac{n^3}{6}}\,/\!/$$

(3)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log T_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)\log(n+1) - n}{n\log\frac{n^3}{6}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\log(n+1) - 1}{3\log n - \log 6}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\left\{\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} - 1}{3\log n - \log 6}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right) - \frac{1}{\log n}}{3 - \frac{\log 6}{\log n}}$$

$$= \underline{\frac{1}{6}}\,/\!/$$