0002193276087999

九州大学

2016年 文系 第1問

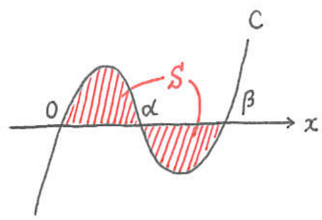
数理 石井K

$\boxed{1}$ 座標平面において，x 軸上に3点 $(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$ があり，曲線 $C : y=x^3+ax^2+bx$ が x 軸とこの3点で交わっているものとする．ただし，a，b は実数である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた2つの部分の面積の和を S とする．S を α と β の式で表せ．

(2) β の値を固定して，$0<\alpha<\beta$ の範囲で α を動かすとき，S を最小とする α を β の式で表せ．

(1) 右図より，



$$S=\int_0^\alpha x^3+ax^2+bx\,dx+\int_\alpha^\beta -x^3-ax^2-bx\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^\alpha-\left[\frac{x^4}{4}+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_\alpha^\beta$$

$$=\frac{\alpha^4}{4}+\frac{a}{3}\alpha^3+\frac{b}{2}\alpha^2-\frac{\beta^4}{4}-\frac{a}{3}\beta^3-\frac{b}{2}\beta^2+\frac{\alpha^4}{4}+\frac{a}{3}\alpha^3+\frac{b}{2}\alpha^2$$

$$=\frac{\alpha^4}{2}+\frac{2}{3}a\alpha^3+b\alpha^2-\frac{\beta^4}{4}-\frac{a}{3}\beta^3-\frac{b}{2}\beta^2$$

ここで，解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=b$ であるから，

$$S=\frac{\alpha^4}{2}-\frac{2}{3}(\alpha+\beta)\alpha^3+\alpha^3\beta-\frac{\beta^4}{4}+\frac{1}{3}(\alpha+\beta)\beta^3-\frac{1}{2}\alpha\beta^3$$

$$=\underline{-\frac{1}{6}\alpha^4+\frac{1}{3}\alpha^3\beta-\frac{1}{6}\alpha\beta^3+\frac{1}{12}\beta^4}\ _{/\!/}$$

(2) (1)で求めた S を α の関数とみて，$S(\alpha)$ と表すと，

$$S'(\alpha)=-\frac{2}{3}\alpha^3+\alpha^2\beta-\frac{1}{6}\beta^3$$

$$=-\frac{1}{6}(4\alpha^3-6\alpha^2\beta+\beta^3)$$

$$=-\frac{1}{6}(2\alpha-\beta)(2\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2)$$

$\therefore$ $S'(\alpha)=0$ となるのは，$\alpha=\dfrac{\beta}{2}$，$\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}\beta$

α	(0)	$\cdots$	$\frac{\beta}{2}$	$\cdots$	(β)
$S'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$S(\alpha)$		↘		↗	

よって増減表より，$0<\alpha<\beta$ において

$S(\alpha)$ が最小となるのは，

$\underline{\alpha=\dfrac{\beta}{2}}\ _{/\!/}$ のとき．