0002188721187999

九州大学

2016年 理系 第5問

数理石井K

$\boxed{5}$ 以下の問いに答えよ．

(1) θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数，i を虚数単位とし，z を $z = \cos\theta + i\sin\theta$ で表される複素数とする．このとき，整数 n に対して次の式を証明せよ．

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2) 次の方程式を満たす実数 x $(0 \leqq x < 2\pi)$ を求めよ．

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

(3) 次の式を証明せよ．

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

(1) ド・モアブルの定理より．

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$\frac{1}{z^n} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

$$\therefore \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = \cos n\theta, \quad -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right) = -\frac{i}{2}\cdot 2i\sin n\theta = \sin n\theta \quad ▨$$

(2) 倍角・三倍角の公式より．

$$\cos x + 2\cos^2 x - 1 - (4\cos^3 x - 3\cos x) = 1$$

$$\therefore 4\cos^3 x - 2\cos^2 x - 4\cos x + 2 = 0$$

$$2(\cos x + 1)(\cos x - 1)(2\cos x - 1) = 0$$

$$\therefore \cos x = \pm 1, \frac{1}{2}$$

$0 \leqq x < 2\pi$ より．$\underline{x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi}$ //

(3) $$(\text{左辺}) = \frac{1-\cos 40^\circ}{2} + \frac{1-\cos 80^\circ}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1-\cos 160^\circ}{2}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{1}{2}(\cos 40^\circ + \underline{\cos 80^\circ + \cos 160^\circ})$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{1}{2}(\cos 40^\circ + 2\cos 120^\circ \cos 40^\circ)$$

$$= \frac{9}{4}$$

$$= (\text{右辺}) \quad ▨$$

和積の公式

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$