2014年 第3問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $s(t)$ はつねに $s'(t)>0$ をみたし，$s(0)=0$ とする．座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ は，時刻 t の関数として $x=s(t)$，$y=\dfrac{1}{2}\{s(t)\}^2$ で与えられ，点Pの速度 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ は

$$|\vec{v}|=\frac{1}{\sqrt{1+\{s(t)\}^2}}$$

をみたすとする．また，$\alpha=s\left(-\dfrac{4}{3}\right)$，$\beta=s\left(\dfrac{4}{3}\right)$ とおく．次に答えよ．

(1) $\dfrac{dx}{dt}=f(x)$ が成り立つように関数 $f(x)$ を定めよ．

(2) $\dfrac{4}{3}=\displaystyle\int_{-\frac{4}{3}}^{0}\frac{1}{f(x)}\frac{dx}{dt}\,dt$，$\dfrac{4}{3}=\displaystyle\int_{0}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{f(x)}\frac{dx}{dt}\,dt$ を用いて，α と β の値を求めよ．

(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2}=g(x)$ が成り立つように関数 $g(x)$ を定めよ．また，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ のとき $g(x)$ が最大となる x の値を求めよ．

(1) $\dfrac{dx}{dt}=s'(t)$，$\dfrac{dy}{dt}=s'(t)s(t)$ より．$|\vec{v}|=\sqrt{\{s'(t)\}^2+\{s'(t)\}^2\{s(t)\}^2}=s'(t)\sqrt{1+\{s(t)\}^2}$ 　$s'(t)>0$ より．

$\therefore\ \dfrac{1}{\sqrt{1+\{s(t)\}^2}}=s'(t)\sqrt{1+\{s(t)\}^2}$ 　$\therefore\ s'(t)=\dfrac{1}{1+\{s(t)\}^2}$ 　$\therefore\ \underline{f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}}$ //

(2) $\dfrac{4}{3}=\displaystyle\int_{s(-\frac{4}{3})}^{s(0)}\frac{1}{f(x)}\,dx$ より．$\dfrac{4}{3}=\displaystyle\int_{\alpha}^{0}1+x^2\,dx$

$=\left[x+\dfrac{x^3}{3}\right]_{\alpha}^{0}$

$\therefore\ \alpha^3+3\alpha+4=0$ 　$\therefore\ (\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+4)=0$ 　$\therefore\ \underline{\alpha=-1}$ //

$\dfrac{4}{3}=\displaystyle\int_{s(0)}^{s(\frac{4}{3})}\frac{1}{f(x)}\,dx$ より．$\dfrac{4}{3}=\displaystyle\int_{0}^{\beta}1+x^2\,dx$

$=\left[x+\dfrac{x^3}{3}\right]_{0}^{\beta}$

$\therefore\ \beta^3+3\beta-4=0$ 　$\therefore\ (\beta-1)(\beta^2+\beta+4)=0$ 　$\therefore\ \underline{\beta=1}$ //

2枚目につづく．

0001837812618999

九州工業大学

2014年 第3問

2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $s(t)$ はつねに $s'(t)>0$ をみたし，$s(0)=0$ とする．座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ は，時刻 t の関数として $x=s(t)$，$y=\dfrac{1}{2}\{s(t)\}^2$ で与えられ，点Pの速度 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ は

$$|\vec{v}|=\frac{1}{\sqrt{1+\{s(t)\}^2}}$$

をみたすとする．また，$\alpha=s\left(-\dfrac{4}{3}\right)$，$\beta=s\left(\dfrac{4}{3}\right)$ とおく．次に答えよ．

(1) $\dfrac{dx}{dt}=f(x)$ が成り立つように関数 $f(x)$ を定めよ．

(2) $\dfrac{4}{3}=\displaystyle\int_{-\frac{4}{3}}^{0}\frac{1}{f(x)}\frac{dx}{dt}\,dt$，$\dfrac{4}{3}=\displaystyle\int_{0}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{f(x)}\frac{dx}{dt}\,dt$ を用いて，α と β の値を求めよ．

(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2}=g(x)$ が成り立つように関数 $g(x)$ を定めよ．また，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ のとき $g(x)$ が最大となる x の値を求めよ．

(3) (1)より．$S'(t)=\dfrac{1}{1+\{S(t)\}^2}$　　∴ $S''(t)=\dfrac{-2S'(t)S(t)}{[1+\{S(t)\}^2]^2}$

$$\therefore\ g(x)=\frac{-2\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot x}{(1+x^2)^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^3}$$ //

$$g'(x)=-\frac{2(1+x^2)^3-2x\cdot 3\cdot 2x\cdot(1+x^2)^2}{(1+x^2)^6}$$

$$=-\frac{2(1-5x^2)}{(1+x^2)^4}$$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt5}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt5}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{1}{4}$	↗		↘		↗	$-\frac{1}{4}$

∴ $-1\leqq x\leqq 1$ のとき．$g'(x)=0$ となるのは．

$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt5}$ のとき．

$g\left(\dfrac{1}{\sqrt5}\right)=-\dfrac{50\sqrt5}{216}$ ，$g\left(-\dfrac{1}{\sqrt5}\right)=\dfrac{50\sqrt5}{216}>g(-1)>0$

∴ $g(x)$ が最大となるのは．$x=-\dfrac{1}{\sqrt5}$ のとき． //