九州工業大学

2016年 工学部 第1問　　1枚目／2枚

1 四面体OABCの面はすべて合同であり，OA = 5，OB = 8，AB = 7である．$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$として，次に答えよ．

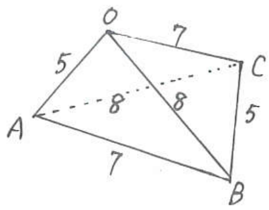
(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) 3点O，A，Bの定める平面をαとし，α上の点Hを直線CHとαが垂直になるように選ぶ．$\overrightarrow{OH}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(3) (2)の点Hに対して，線分CHの長さを求めよ．

(4) 四面体OABCの体積V_1を求めよ．また，辺OCの中点をDとし，さらに辺OB上に点EをAE＋EDが最小となるようにとる．このとき，四面体OAEDの体積V_2を求めよ．

(1) 右図のようになっている．余弦定理より．



$$\cos\angle AOB=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot5\cdot8}=\frac{1}{2},$$

$$\cos\angle BOC=\frac{7^2+8^2-5^2}{2\cdot7\cdot8}=\frac{11}{14},$$

$$\cos\angle COA=\frac{5^2+7^2-8^2}{2\cdot5\cdot7}=\frac{1}{7}$$

よって．$\vec{a}\cdot\vec{b}=5\cdot8\cdot\frac{1}{2}=20$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=8\cdot7\cdot\frac{11}{14}=44$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=7\cdot5\cdot\frac{1}{7}=5$

$\therefore\ \underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=20,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=44,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=5}$ //

(2) Hはα上の点より．$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ (s,tは実数)と表せる．

このとき．$\overrightarrow{CH}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$ で $\overrightarrow{CH}\cdot\vec{a}=0$ かつ $\overrightarrow{CH}\cdot\vec{b}$ より．

$\overrightarrow{CH}\cdot\vec{a}=s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}$，$\overrightarrow{CH}\cdot\vec{b}=s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}$

$\therefore$ (1)より．$25s+20t-5=0$　$\therefore\ 5s+4t=1\ \cdots①$

$20s+64t-44=0$　$\therefore\ 5s+16t=11\ \cdots②$

①，②より．$s=-\frac{7}{15},\ t=\frac{5}{6}$　$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OH}=-\frac{7}{15}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}}$ //

(3) $\overrightarrow{CH}=-\frac{7}{15}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}-\vec{c}$

$$\therefore\ |\overrightarrow{CH}|^2=\frac{49}{225}|\vec{a}|^2+\frac{25}{36}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-\frac{7}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{5}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{14}{15}\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$=\frac{44}{3}$　$\therefore\ \underline{|\overrightarrow{CH}|=\frac{2\sqrt{33}}{3}}$ //

2枚目へつづく

2016年 工学部 第1問　　2枚目/2枚　　数理 石井K

$\boxed{1}$ 四面体OABCの面はすべて合同であり，OA $=5$，OB $=8$，AB $=7$である．$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$として，次に答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) 3点O，A，Bの定める平面をαとし，α上の点Hを直線CHとαが垂直になるように選ぶ．$\overrightarrow{OH}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(3) (2)の点Hに対して，線分CHの長さを求めよ．

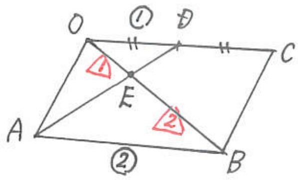
(4) 四面体OABCの体積V_1を求めよ．また，辺OCの中点をDとし，さらに辺OB上に点EをAE＋EDが最小となるようにとる．このとき，四面体OAEDの体積V_2を求めよ．

(4) $V_1=\frac{1}{3}\cdot\triangle OAB\cdot|\overrightarrow{CH}|$

(1)より，$\angle AOB=60^\circ$であるから，$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\sin60^\circ=10\sqrt{3}$

$\therefore V_1=\frac{1}{3}\cdot10\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{33}}{3}$

$=\underline{\frac{20\sqrt{11}}{3}}$ //



(5) 四面体DOABは，OABCに比べ，

底面をOABにとったときの高さが$\frac{1}{2}$になっている．

また，四面体OAEDはDOABに比べて

底面積が$\frac{1}{3}$となっている．

よって，$V_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot V_1$

$=\underline{\frac{10\sqrt{11}}{9}}$ //