山口大学

2014年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ a, bを実数とする．行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$について，次の問いに答えなさい．

(1) すべての自然数nに対して，

$$A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$$

となる実数a_n, b_nがあることを数学的帰納法で示し，a_n, b_nを用いてa_{n+1}, b_{n+1}を表しなさい．

(2) $c_n=a_n+b_n$, $d_n=a_n-b_n$とおく．数列$\{c_n\}$の漸化式と数列$\{d_n\}$の漸化式をそれぞれ求め，a, b, nを用いてc_n, d_nを表しなさい．

(3) a, b, nを用いてa_n, b_nを表しなさい．

(1) (i) $n=1$のとき $A^1=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ $\therefore$ $a_1=a$, $b_1=b$ ととれば成り立つ

(ii) $n=k$のとき成り立つと仮定すると．$A^k=\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ と表せる．

$$\therefore A^{k+1}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\cdot a_k+b\cdot b_k & a\cdot b_k+b\cdot a_k \\ b\cdot a_k+a\cdot b_k & b\cdot b_k+a\cdot a_k \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $a_{k+1}=a\cdot a_k+b\cdot b_k$, $b_{k+1}=b\cdot a_k+a\cdot b_k$ とおくと成り立つ

以上より．すべての自然数nに対して成り立つ ■

また，このとき．$\underline{a_{n+1}=a\cdot a_n+b\cdot b_n,\ b_{n+1}=b\cdot a_n+a\cdot b_n}$ //

(2) (1)より．$a_{n+1}+b_{n+1}=(a+b)(a_n+b_n)$, $a_{n+1}-b_{n+1}=(a-b)(a_n-b_n)$

$\therefore$ $c_{n+1}=(a+b)c_n$, $d_{n+1}=(a-b)d_n$

数列$\{c_n\}$は初項 $(a_1+b_1)=(a+b)$，公比$(a+b)$の等比数列．
数列$\{d_n\}$は初項 $(a_1-b_1)=(a-b)$，公比$(a-b)$の等比数列．

$\therefore$ $\underline{c_n=(a+b)^n,\ d_n=(a-b)^n}$ //

(3) $a_n=\frac{1}{2}(c_n+d_n)$ より． $\underline{a_n=\dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}}$ //

$b_n=\frac{1}{2}(c_n-d_n)$ より． $\underline{b_n=\dfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}}$ //