

2011年工学部第2問

2 実数 θ に対して、行列 A を $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とする。また、 n を自然数とし、 A の n 乗を A^n で表す。次に答えよ。

(1) 数学的帰納法により、すべての自然数 n に対して

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

が成立することを示せ。

(2) $\theta = \frac{\pi}{12}$ とする。ある自然数 n に対しては、行列 A^n によって曲線 $y = -\frac{1}{2x}$ 上の点が常に曲線 $x^2 - y^2 = -1$ 上の点に移される。このような自然数 n の最小値を求めよ。