



2014年 医学部 第2問

 数理
石井K

2 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ について、次の問に答えよ。ただし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $A^2 - 3A + 2E$ を求めよ。

(2) 自然数 n に対して、 $E + A + A^2 + \dots + A^n = a_n A + b_n E$ となる実数 a_n, b_n をそれぞれ n を用いて表せ。

$$(1) A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} A^2 - 3A + 2E &= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} // \end{aligned}$$

(2) (1) の式に両辺 A^n をかけて、 $A^{n+2} - 3A^{n+1} + 2A^n = 0$ (0 は零行列)

$$\begin{aligned} \therefore A^{n+2} - A^{n+1} &= 2(A^{n+1} - A^n) \quad \therefore \{A^{n+1} - A^n\} \text{ は初項 } A^2 - A^1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 公比 } 2 \text{ の} \\ &\text{ 数数列とみなすと、} A^{n+1} - A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore A^{n+1} - A^n = \begin{pmatrix} -2^n & -2^n \\ 2^{n+1} & 2^{n+1} \end{pmatrix} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また、} A^{n+2} - 2A^{n+1} = A^{n+1} - 2A^n \quad \therefore \text{同様にして、} A^{n+1} - 2A^n = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より、} A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix} \quad \text{これは } A^0 = E \text{ をみたしてゐる。}$$

$$\begin{aligned} \therefore E + A + \dots + A^n &= \sum_{k=0}^n A^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n 2 - 2^k & \sum_{k=0}^n 1 - 2^k \\ \sum_{k=0}^n 2^{k+1} - 2 & \sum_{k=0}^n 2^{k+1} - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2n+3 - 2^{n+1} & n+2 - 2^{n+1} \\ 2^{n+2} - 2n - 4 & 2^{n+2} - n - 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{一方、} a_n A + b_n E = \begin{pmatrix} b_n & -a_n \\ 2a_n & 3a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$\text{成分を比較して、} \underline{a_n = 2^{n+1} - n - 2, \quad b_n = 2n + 3 - 2^{n+1}} //$$