2015年 第2問

$\boxed{2}$ 放物線 $C : y = -a^2x^2+1$ と直線 $\ell : y = a(x+1)$ について，次の各問に答えよ．ただし，a は $a>0$ を満たす定数とする．

(1) C と ℓ が異なる2つの共有点をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

(2) ℓ が C に接するとき，不等式 $x \leqq 0$ の表す領域内において C と ℓ および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $a^2x^2+ax+a-1=0$ の判別式を D とおくと，

$$D = a^2-4a^2(a-1)$$

$$= a^2(-4a+5)$$

異なる2つの共有点をもつので $D>0$

$a>0$ より，$\underline{0<a<\frac{5}{4}}$ //

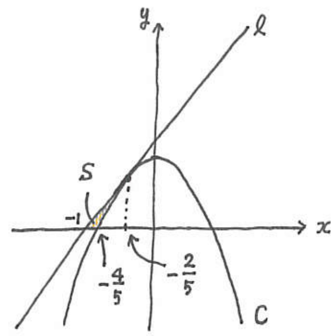
(2) ℓ と C が接するとき，(1) の $D=0$ より $a=\frac{5}{4}$

このとき，$C : y = -\frac{25}{16}x^2+1$，$\ell : y = \frac{5}{4}(x+1)$

$\therefore \frac{25}{16}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}=0$

$\therefore \frac{25}{16}\left(x+\frac{2}{5}\right)^2=0 \qquad \therefore x=-\frac{2}{5}$

よって，接点の x 座標は $-\frac{2}{5}$



$$\therefore S = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4} - \int_{-\frac{4}{5}}^{-\frac{2}{5}} -\frac{25}{16}x^2+1\,dx$$

$$= \frac{9}{40} - \left[-\frac{25}{48}x^3+x\right]_{-\frac{4}{5}}^{-\frac{2}{5}}$$

$$= \frac{9}{40} - \left(\frac{1}{30}-\frac{2}{5}-\frac{4}{15}+\frac{4}{5}\right)$$

$$= \underline{\frac{7}{120}} \text{ //}$$