



2017年文系第2問



2 a, b を正の実数とする。座標空間における4点 $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, 1)$ を頂点とする四面体 $OABC$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) \vec{CA} と \vec{CB} の内積を求めよ。
- (2) $\cos \angle ACB$ と $\sin \angle ACB$ を a, b を用いて表せ。
- (3) 三角形 ABC の面積を a, b を用いて表せ。
- (4) 四面体 $OABC$ の体積が1であるとき、三角形 ABC の面積の最小値とそのときの a と b の値を求めよ。

$$(1) \vec{CA} = (a, 0, -1), \vec{CB} = (0, b, -1) \text{ より}$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 1$$

$$(2) \cos \angle ACB = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| |\vec{CB}|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{b^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}} \quad "$$

$$\sin^2 \angle ACB = 1 - \cos^2 \angle ACB$$

$$= 1 - \frac{1}{(a^2+1)(b^2+1)}$$

$$= \frac{a^2b^2 + a^2 + b^2}{(a^2+1)(b^2+1)}$$

$$\therefore \sin \angle ACB = \sqrt{\frac{a^2b^2 + a^2 + b^2}{(a^2+1)(b^2+1)}} \quad "$$

$$(3) \Delta ABC = \frac{1}{2} |\vec{CA}| |\vec{CB}| \sin \angle ACB$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + a^2 + b^2} \quad "$$

$$(4) \text{四面体 } OABC \text{ の体積を } V \text{ とすると } V = \frac{1}{3} \times \Delta OAB \times 1$$

$$\therefore \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ab \cdot 1 = 1 \quad \therefore ab = 6$$

$$\therefore (2) \text{ より } \Delta ABC = \frac{1}{2} \sqrt{36 + a^2 + \frac{36}{a^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left(a - \frac{6}{a}\right)^2 + 48}$$

$$\geq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{48} \quad (\text{等号成立は } a = \frac{6}{a} \text{ すなわち } a = \sqrt{6} \text{ のとき})$$

$$\therefore \text{最小値 } 2\sqrt{3} \quad (a = \sqrt{6}, b = \sqrt{6} \text{ のとき}) \quad "$$