



2016年工学部・理学部（その他）第2問

 数理  
石井K

 2 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  がある.

$$a_1 = -\frac{1}{5}, \quad a_n - a_{n+1} = 2(3n+1)(n-3)a_n a_{n+1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

このとき、次の問いに答えよ.

- (1) 1以上の整数  $n$  に対し、 $a_n \neq 0$ であることを示せ.  
 (2)  $a_n$  を  $n$  を用いて表せ.  
 (3)  $a_n < 0$  を満たす  $a_n$  の値のうち、最大のものを  $M$  とする.  $a_n = M$  であるような  $n$  を求めよ.

(1) 数学的帰納法で示す

(i)  $n=1$  のとき

$$a_1 = -\frac{1}{5} \neq 0 \text{ となり成り立つ}$$

(ii)  $n=k$  のとき成り立つと仮定するこのとき、 $a_k \neq 0$  と漸化式より  $\{2(3k+1)(k-3)a_{k+1}\} a_{k+1} = a_k$  であるから

$$a_{k+1} \neq 0$$

よって  $n=k+1$  のとき成り立つ(i), (ii) より 1以上の整数  $n$  に対し、 $a_n \neq 0$  である  $\square$ (2) 与えられた漸化式の両辺を  $a_n a_{n+1} (\neq 0)$  で割り、

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2(3n+1)(n-3)$$

よって、 $n \geq 2$  に対し、

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} 2(3k+1)(k-3) \\ &= -5 + 6 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - 16 \sum_{k=1}^{n-1} k - 6 \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ &= -5 + 6 \cdot \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) - 16 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n - 6(n-1) \\ &= 2n^3 - 11n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2n^3 - 11n^2 + 3n + 1} \quad \text{これは } n=1 \text{ のときも成り立つ}$$

(3)  $f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 3x + 1$  とおくと、 $f(x) = 6x^2 - 22x + 3 = 6\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{103}{6}$ また、 $f'(x) = 33 > 0$  より、 $y = f(x)$  は  $x \geq 4$  において単調増加

$$a_1 = -\frac{1}{5}, \quad a_2 = -\frac{1}{21}, \quad a_3 = -\frac{1}{35}, \quad a_4 = -\frac{1}{35}, \quad a_5 = -\frac{1}{9}$$

以上より、 $M = -\frac{1}{35}$  で、 $a_n = M$  となるのは、 $n = 3, 4$  //