

2016年文系第3問



3 s, t を実数とする。平面上の異なる4点 A, B, C, P は $\vec{PC} = s\vec{PA} + t\vec{PB}$ を満たしている。また、点 C および点 P は直線 AB 上にない。線分 BC を $1:3$ に内分する点 Q が直線 AP 上にあるとき、次の問いに答えよ。

- (1) \vec{PQ} を \vec{PB} と \vec{PC} を用いて表し、 t の値を求めよ。
 (2) $\vec{AQ} = 2\vec{AP}$ を満たすとき、 s の値を求めよ。
 (3) 点 P が $\triangle ABC$ の内部にあるとき、 s のとり得る値の範囲を求めよ。ただし、三角形の内部に周は含まれないものとする。

(1) 点 Q は線分 BC を $1:3$ に内分するので、

$$\vec{PQ} = \frac{3}{4}\vec{PB} + \frac{1}{4}\vec{PC}$$

これに $\vec{PC} = s\vec{PA} + t\vec{PB}$ を代入して、

$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= \frac{3}{4}\vec{PB} + \frac{1}{4}(s\vec{PA} + t\vec{PB}) \\ &= \frac{1}{4}(t+3)\vec{PB} + \frac{s}{4}\vec{PA}\end{aligned}$$

点 Q は直線 AP 上にあるので、 $\frac{1}{4}(t+3) = 0 \quad \therefore \underline{t = -3}$ //

(2) (1) より、 $\vec{PQ} = \frac{s}{4}\vec{PA}$

$$\therefore \vec{AQ} - \vec{AP} = -\frac{s}{4}\vec{AP}$$

$$\therefore \vec{AQ} = \left(1 - \frac{s}{4}\right)\vec{AP}$$

これと、 $\vec{AQ} = 2\vec{AP}$ より、 $1 - \frac{s}{4} = 2 \quad \therefore \underline{s = -4}$ //

(3) (1) より、

$$\vec{PC} = s\vec{PA} - 3\vec{PB}$$

$$\therefore \vec{AC} - \vec{AP} = -s\vec{AP} - 3(\vec{AB} - \vec{AP})$$

$$\therefore \vec{AP} = \frac{3}{4-s}\vec{AB} + \frac{1}{4-s}\vec{AC}$$

\therefore 点 P が $\triangle ABC$ の内部にあるとき、 $\frac{3}{4-s} > 0$ かつ $\frac{1}{4-s} > 0$ かつ $\frac{4}{4-s} < 1$

よって、 $\underline{s < 0}$ //