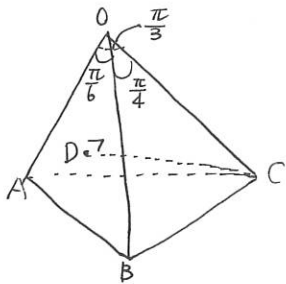


2017年教育第3問

増田

3 四面体 OABC において、 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 1$ ,  $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$ ,  $\angle BOC = \frac{\pi}{4}$ ,  $\angle COA = \frac{\pi}{3}$  であるとする。次の問に答えよ。

- (1) 頂点 C から三角形 OAB を含む平面に下ろした垂線を CD とするとき、 $\vec{OD}$  を  $\vec{OA}$  と  $\vec{OB}$  を用いて表せ。  
 (2) 四面体 OABC の体積を求めよ。



(1) 点 D は平面 OAB 上にあるので、実数  $k, l$  を用いて

$$\vec{OD} = k\vec{OA} + l\vec{OB}$$

と表される。

$\vec{CD} \perp$  平面 OAB より、

$$\begin{cases} \vec{CD} \cdot \vec{OA} = 0 \dots \textcircled{1} \\ \vec{CD} \cdot \vec{OB} = 0 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \vec{CD} \cdot \vec{OA} &= (k\vec{OA} + l\vec{OB} - \vec{OC}) \cdot \vec{OA} \\ &= k + l\vec{OA} \cdot \vec{OB} - \vec{OA} \cdot \vec{OC} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ここで: } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 1 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 1 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \vec{CD} \cdot \vec{OA} = k + \frac{\sqrt{3}}{2}l - \frac{1}{2} = 0 \dots \textcircled{1}'$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \vec{CD} \cdot \vec{OB} &= (k\vec{OA} + l\vec{OB} - \vec{OC}) \cdot \vec{OB} \\ &= k\vec{OA} \cdot \vec{OB} + l - \vec{OB} \cdot \vec{OC} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}k + l - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \dots \textcircled{2}' \end{aligned}$$

$\textcircled{1}'$ ,  $\textcircled{2}'$  を連立して解くと  $k = 2 - \sqrt{6}$ ,  $l = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

$$\therefore \vec{OD} = (2 - \sqrt{6})\vec{OA} + (2\sqrt{2} - \sqrt{3})\vec{OB}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \vec{CD} &= \vec{OD} - \vec{OC} \\ &= (2 - \sqrt{6})\vec{OA} + (2\sqrt{2} - \sqrt{3})\vec{OB} - \vec{OC} \\ |\vec{CD}|^2 &= (2 - \sqrt{6})^2 + (2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 1 \\ &\quad + 2(2 - \sqrt{6})(2\sqrt{2} - \sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\quad + 2(2\sqrt{2} - \sqrt{3})(-1)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\quad + 2(2 - \sqrt{6})(-1)\frac{1}{2} \\ &= \sqrt{6} - 2 \end{aligned}$$

$$|\vec{CD}| = \sqrt{\sqrt{6} - 2}$$

また、 $\triangle OAB$  の面積は

$$\begin{aligned} (\triangle OAB \text{ の面積}) &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} (\text{四面体 OABC の体積}) &= \frac{1}{4} \times \sqrt{\sqrt{6} - 2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{\sqrt{\sqrt{6} - 2}}{12} \quad \# \end{aligned}$$