



2014年医学部(医学科)第3問

3 以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数  $a, b, c$  について, 不等式

$$\frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} < \log 4$$

が成立することを示せ. ただし,  $\log$  は自然対数とし, 必要なら  $e > 2.7$  および  $\log 2 > 0.6$  を用いてもよい.

(2) 自然数  $a, b, c, d$  の組で

$$a^{bc} b^{ca} c^{ab} = d^{abc}, \quad a \leq b \leq c, \quad d \geq 3$$

を満たすものをすべて求めよ.

(1)  $f(x) = \frac{\log x}{x}$  ( $x > 0$ ) とおくと,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

右の増減表より,  $f(x) < \frac{1}{e}$ 

$$\text{これより, } \frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} < \frac{3}{e} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } \log 4 - \frac{3}{e} &= 2 \log 2 - \frac{3}{e} \\ &> 2 \times 0.6 - \frac{3}{2.7} \\ &= \frac{4}{45} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{3}{e} < \log 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} < \log 4 \quad \blacksquare$$

(2)  $a^{bc} b^{ca} c^{ab} = d^{abc} \iff bc \log a + ca \log b + ab \log c = abc \log d$  (対数をとった)

$$\iff \frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} = \log d \quad (\text{両辺 } abc \neq 0 \text{ でわった})$$

(1) より,  $\log d < \log 4 \quad \therefore d < 4 \quad d \geq 3$  であるから,  $d = 3$ 

$$\frac{\log 3}{3} - \frac{\log 2}{2} = \frac{2 \log 3 - 3 \log 2}{6} = \frac{1}{6} \log \frac{9}{8} > 0 \quad \therefore \frac{\log 3}{3} > \frac{\log 2}{2}$$

$$\therefore \underline{a = b = c = d = 3}$$

$x$	(0) ...	$e$ ...
$f(x)$	+	0 -
$f'(x)$	↗	$\frac{1}{e}$ ↘

