2018年 工学部・情報工学部 第3問

$\boxed{3}$ 平面 α 上の $\triangle$OAB に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = t$，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とする．ただし，$0 < \theta < \pi$ とする．また，$\triangle$OAB の面積を S とする．次に答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 - 4\sqrt{3}S$ を t，$\cos\theta$，$\sin\theta$ を用いて表せ．

(2) t を固定したとき，(1) で求めた式を $f(\theta)$ とする．$f(\theta)$ の最小値を t を用いて表せ．また，その最小値をとるときの θ の値を求めよ．

設問 (3)，(4) では，点 P が平面 α 上を動くものとし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{x}$ とする．

(3) t および θ を固定したとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2$ の最小値を t，$\cos\theta$ を用いて表せ．また，その最小値をとるときの $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(4) t，θ および $\vec{x}$ によらず，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2 \geqq \dfrac{4\sqrt{3}}{3}S$ が成り立つことを示せ．また，この不等式において等号が成立するのはどのような場合か答えよ．